

Algebra I

11. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 12.01.24 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

Aufgabe 11.1. (2+2) Finden Sie:

(i) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3 + \sqrt{11}}) : \mathbb{Q}(\sqrt{11})]$.

(ii) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[5]{7}) : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 11.2. Finden Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ über \mathbb{Q} .

[Hinweis: Benutzen Sie die Aufgaben 10.3 und 10.4.]

Aufgabe 11.3. (2+2) Sei L/K eine Körpererweiterung. Zeigen Sie:

(i) $A = \{a \in L : a \text{ ist algebraisch über } K\}$ ist ein Teilkörper von L .

(ii) L/K ist genau dann algebraisch, wenn jeder Teilring $R \subseteq L$ mit $K \subseteq R$ ein Körper ist.

Aufgabe 11.4. Zeigen Sie: $\sqrt{\pi} \notin \mathbb{Q}(\pi)$.

[Hinweis. π ist transzendent über \mathbb{Q} . Also ist die Abbildung $\mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[\pi]$, $p(X) \mapsto p(\pi)$ ein Isomorphismus und $\mathbb{Q}(\pi) \cong \text{Quot}(\mathbb{Q}[\pi])$. Kopieren Sie nun den Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.]