

Algebra I

12. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 19.01.24 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

Aufgabe 12.1. (1+1+1+1) Suchen Sie in jedem der folgenden Fälle einen Zerfällungskörper L von $f(X)$ über K und berechnen Sie $[L : K]$.

- (i) $f(X) = X^2 + X + 1$, $K = \mathbb{Q}$.
- (ii) $f(X) = X^4 - 4$, $K = \mathbb{Q}$.
- (iii) $f(X) = X^6 - 8$, $K = \mathbb{Q}$.
- (iv) $f(X) = X^{10} + X^2 + 1$, $K = \mathbb{R}$.

Aufgabe 12.2. (2+2) Erinnerung: wenn p eine Primzahl ist, ist der Körper \mathbb{F}_p gleich

$$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{p-1}\}.$$

- (i) Finden Sie Erzeuger für die zyklischen Gruppen \mathbb{F}_7^\times und \mathbb{F}_{11}^\times .
- (ii) Finden Sie eine Quadratwurzel und eine 13. Wurzel von $\overline{3}$ in \mathbb{F}_{13} .

Aufgabe 12.3. (2+2) Sei \mathbb{F} ein endlicher Körper mit q Elementen.

- (i) Beweisen Sie: Das Produkt der Elemente von \mathbb{F}^\times gleich -1 ist.

[Hinweis. Sei G die zyklische Gruppe von Ordnung 2 und sei σ ein Erzeuger von G . Es gibt eine Aktion von G auf \mathbb{F}^\times durch $\sigma * x = 1/x$ für $x \in \mathbb{F}^\times$. Finden Sie die Fixpunkte. Behandeln Sie die Fälle $\text{char } \mathbb{F} = 2$ und $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ getrennt.]

- (ii) Zeigen Sie: Wenn $q \equiv 1 \pmod{4}$, dann hat -1 eine Quadratwurzel in \mathbb{F} .

[Hinweis. Es gibt eine andere Aktion von G auf \mathbb{F}^\times durch $\sigma * x = -x$ für $x \in \mathbb{F}^\times$. Betrachten Sie Vertreter der Bahnen und wenden Sie (i) an.]

Aufgabe 12.4. Seien q und s Primzahlpotenzen. Zeigen Sie: \mathbb{F}_q hat genau dann einen Teilkörper, der zu \mathbb{F}_s isomorph ist, wenn q eine Potenz von s ist.