# Lineare Algebra II
# 3. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 28.04.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors

**Aufgabe 3.1.** (2+2) Wir betrachten $K^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

(i) Finden Sie für $K = \mathbb{R}$ die orthogonale Projektion des Vektors $(1, 2, 3)$ auf den Unterraum $U = \mathrm{Span}((0, 1, -1))$.
(ii) Finden Sie für $K = \mathbb{C}$ die orthogonale Projektion des Vektors $(1, 2, 3)$ auf den Unterraum $W = \mathrm{Span}((1, i, 0), (1, 1, 1))$.

**Aufgabe 3.2.** (1+2+1) Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, und sei $U = \mathrm{Span}((0, 1, -1))$ wie oben.

(i) Finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$ der Form $(u, e_i, e_j)$, nicht unbedingt orthogonal, wobei $u = (0, 1, -1)$ und $(e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
(ii) Finden Sie eine orthonormale Basis von $X = U^\perp$.
(iii) Finden Sie die orthogonale Projektion des Vektors $(1, 2, 3)$ auf $X$.

**Aufgabe 3.3.** (1+1+2) Wenn $U$ ein Unterraum eines Skalarproduktraums $V$ ist, dann ist $U^{\perp\perp} = U$, wenn $U$ endlichdimensional ist, aber es ist nicht immer wahr. Die folgenden Aussagen sind jedoch wahr. Beweisen Sie sie.

(i) $U \subseteq U^{\perp\perp}$.
(ii) Wenn $U \subseteq W$ Unterräume von $V$ sind, dann gilt $W^\perp \subseteq U^\perp$.
(iii) $U^{\perp\perp\perp} = U^\perp$.

**Aufgabe 3.4.** (1+2+1) Erinnern Sie sich, wenn $V$ ein Vektorraum ist, dann wird eine lineare Abbildung $h : V \to K$ eine *Linearform* genannt (LA I, §5.4). Sei $V$ ein Skalarproduktraum. Für $w \in V$ definieren wir eine Linearform $h_w$ durch $h_w(v) = \langle v, w\rangle$.

(i) Zeigen Sie: Wenn $h_w = h_{w'}$ gilt, dann gilt $w = w'$.
(ii) Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine orthonormale Basis von $V$. Zeigen Sie, indem Sie ein Element der Form $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ für geeignete $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ betrachten, dass jede Linearform gleich $h_w$ für ein $w \in W$ ist.
(iii) Sei $V$ endlichdimensional und sei $V^*$ der Dualraum von $V$. Ist die Abbildung $h : V \to V^*$, $w \mapsto h_w$ ein Isomorphismus?