Lineare Algebra II
8. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 02.06.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors

Aufgabe 8.1. (2+2) (i) Finden Sie eine Matrix, die in der Jordan-Normalform vorliegt und der folgenden Matrix ähnlich ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(ii) Listen Sie die möglichen Jordan-Normalformen für eine nilpotente 7×7-Matrix B mit Minimalpolynom $m_B(X) = X^3$ auf. (Die Reihenfolge der Blöcke ist irrelevant.) Welche davon können immer noch nicht unterschieden werden, wenn man die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 0 kennt?

Aufgabe 8.2. (4) Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus und sei $u \in V$ ungleich Null. Sei $d > 0$ minimal, so dass $f^d(u) = 0$. Zeigen Sie, dass das Tupel

$$(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{d-1}(u))$$

linear unabhängig ist.

Aufgabe 8.3. (2+2) Seien V ein Vektorraum, f ein Endomorphismus von V mit $f^d = 0$, $u \in V$ ein Element mit $f^{d-1}(u) \neq 0$, und $h : V \to K$ eine Linearform mit $h(f^{d-1}(u)) = 1$ und $h(f^i(u)) = 0$ für $i < d-1$. Im Satz über die Jordan-Normalform in §9.3 haben wir $e \in \mathrm{End}(V)$ durch

$$e(v) = \sum_{i=0}^{d-1} h(f^i(v)) f^{d-1-i}(u)$$

definiert. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften (die im Beweis des Satzes verwendet werden).

(i) $e(f^j(u)) = f^j(u)$ für alle j.
(ii) $e(f(v)) = f(e(v))$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 8.4. (2+2) Es seien $A \in M_n(\mathbb{C})$ und $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Beweisen Sie:

(i) A und A^{T} sind ähnlich.
(ii) $B^{\mathrm{T}}B^{-1}$ und $B(B^{-1})^{\mathrm{T}}$ sind ähnlich.