Lineare Algebra II
12. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 30.06.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors

Aufgabe 12.1. (1+2+1) Sei A die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

(i) Finden Sie das charakteristische Polynom von A.
(ii) Finden Sie orthonormale Basen der Eigenräume.
(iii) Finden Sie eine orthogonale Matrix P und eine diagonale Matrix D mit $D = P^{-1}AP$.

Aufgabe 12.2. (1+2+1) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

hat das charakteristische Polynom $\chi_A(X) = -(X-1)(X^2 - 2X + 10)$.

(i) Zeigen Sie, dass A normal ist.
(ii) Finden Sie orthonormale Basen der Eigenräume.
(iii) Finden Sie eine unitäre Matrix P und eine diagonale Matrix D, so dass $D = P^{-1}AP$.

Aufgabe 12.3. (1+2+1) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$.

(i) Zeigen Sie, dass A genau dann hermitesch ist, wenn iA schiefhermitesch ist.
(ii) Zeigen Sie, dass A eindeutig in der Form $A = B + iC$ mit B und C hermitesch geschrieben werden kann.
(iii) Zeigen Sie, dass A genau dann normal ist, wenn B und C kommutieren.

[Hinweis. Sie können ohne Beweis verwenden, dass als reeller Vektorraum $M_n(\mathbb{C}) = U \oplus W$ gilt, wobei $U = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^\dagger = A\}$ und $W = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^\dagger = -A\}$. Sehen Sie LA I Aufgabe 9.4.]

Mehr...

Aufgabe 12.4. (1+1+1+1) Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(i) Zeigen Sie, dass, wenn $D \in M_{m\times n}(K)$ und $\mathrm{Spur}(DD^\dagger) = 0$, dann $D = 0$.

(ii) Angenommen, $A \in M_n(K)$ hat eine obere Dreiecksblockform

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

wobei B und C quadratische Matrizen sind. Zeigen Sie, dass, wenn A normal ist, $\mathrm{Spur}(DD^\dagger) = 0$ und daher $D = 0$.

(iii) Nehmen wir an, dass f ein normaler Endomorphismus eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums V ist und dass U ein f-invarianter Unterraum von V ist. Erklären Sie sorgfältig, wie Sie eine Basis von V wählen können, bezüglich der die Matrix A von f normal ist und eine obere Dreiecksblockform aufweist. Zeigen Sie daher, dass $U^\perp$ invariant unter f ist.

(iv) Zeigen Sie, dass U invariant unter $f^\dagger$ ist.