

Vorlesung Winter 2009/2010

Elementare Geometrie

Zwei inverse Kreise

Es seien X und X' zwei verschiedene Kreise. Es sei $h(O, \lambda)$ eine zentrale Homothetie, die den Kreis X auf den Kreis X' abbildet.

$$h(O, \lambda)(X) = X'.$$

Es sei p die Potenz des Punktes O bezüglich des Kreises X . Dann gilt für die Inversion $I(O, p)(X) = X$. Nach der Gleichung

$$h(O, \lambda)I(O, p) = I(O, \lambda p)$$

finden wir

$$I(O, \lambda p)(X) = X'.$$

Also ist X' das Bild von X bei einer Inversion mit dem Zentrum O .

Diesen Schluss kann man auch umkehren. Es sei $I(M, q)$ eine Inversion, so dass $I(M, q)(X) = X'$. Es sei p die Potenz von M bezüglich des Kreises X . Da die Kreise verschieden sind, ist $p \neq q$. Wir wählen die Zahl $\mu \neq 1$, so dass $q = \mu p$. Dann gilt

$$h(M, \mu)(X) = h(M, \mu) \circ I(M, p)(X) = I(M, q)(X) = X'.$$

Also gibt es eine zentrale Homothetie mit dem Fixpunkt M , die X auf X' abbildet.

Wir wollen jetzt annehmen, dass X' die Inversion von X an einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r ist

$$I(O, r^2)(X) = X'.$$

Wir setzen $\iota = I(O, r^2)$. Wir schreiben $\varkappa = h(O, \lambda)$ für die zentrale Homothetie, die den Kreis X auf den Kreis X' abbildet.

Wir legen durch O eine Gerade l , die den Kreis X in den Punkten A und B schneiden möge. Es seien $A' \in X'$ und $B' \in X'$ die inversen Punkte. Dann liegen auch A' und B' auf der Geraden l . Es gilt:

$$\begin{aligned} \iota(A) &= A' & \varkappa(A) &= B' \\ \iota(B) &= B' & \varkappa(B) &= A'. \end{aligned}$$

In der Tat, $\varkappa(A)$ muss einer der Punkte A' oder B' sein. Es kann aber nicht A' sein, da dieser Punkt invers zu A ist.

Wir legen noch eine zweite Gerade durch O , die X in den Punkten C und D trifft und X' in den inversen Punkten C' und D' .

Dann bildet \varkappa die Strecke \overline{BD} auf die Strecke $\overline{A'C'}$. Daher sind diese Strecken parallel. Genauso folgt, dass $AC \parallel B'D'$.

Die Punkte $BB'DD'$ liegen auf einem Kreis \mathcal{C} . In der Tat, wir legen einen Kreis durch die drei Punkte $BB'D$. Da dieser Kreis durch die inversen Punkte B und B' geht, ist er orthogonal zum Inversionskreis. Daher muss dieser Kreis auch durch D' gehen.

Es sei $P = BD \cap B'D'$. Dann gilt nach dem Potenzsatz am Kreis \mathcal{C} , dass

$$|PB||PD| = |PB'||PD'|.$$

Diese Gleichung besagt, dass P auf der radikalen Achse von X und X' liegt. (Anders kann man so argumentieren: P ist der Schnittpunkt der drei radikalen Achsen von X und \mathcal{C} , von X' und \mathcal{C} und von X und X' .)

Genauso liegen auch die Punkte $ACC'A'$ auf einem Kreis.