Zusammenfassung der Vorlesung

Es sei k ein Körper. Eine Kurve X über k Schema X, so dass ein endlicher flacher Morphismus $f : X \to \mathbb{P}^1_k$ existiert. Wenn V ein k-Vektorraum ist, so bezeichnen wir mit $V^\wedge$ den dualen Vektoraum.

Definition 1 *Es sei X eine Kurve über k. Ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{K}_X$ heißt eine dualisierende Garbe es einen Isomorphismus von Funktoren auf der Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln gibt*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{K}_X) \cong H^1(X, \mathcal{F})^\wedge. \tag{1}$$

Wir bemerken, dass es diesen Isomorphismus von Funktoren dann automatisch auch für quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ gibt. Wir können sagen, dass $\mathcal{K}_X$ den Funktor auf der rechten Seite von (1) darstellt. Das universelle Element aus $H^1(X, \mathcal{K}_X)^\wedge$ nennt man den Spurmorphismus

$$Tr : H^1(X, \mathcal{K}_X) \to k.$$

Proposition 2 *Auf jeder Kurve existiert eine dualisierende Garbe. Für $X = \mathbb{P}^1$ ist $\mathcal{K}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ und der Sprurmorphismus ist der kanonische Isomorphismus*

$$H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) \cong k.$$

Proposition 3 *Es sei $g : X \to Y$ ein endlicher Morphismus von Kurven. Es sei $\mathcal{K}_Y$ eine dualisierende Garbe auf Y. Es gibt einen eindeutig bestimmten kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{K}_X$, so dass*

$$f_*\mathcal{K}_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \mathcal{K}_Y)$$

als $f_*\mathcal{O}_X$-Modul.

Der $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{K}_X$ ist eine dualisierende Garbe auf X.

Es sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X. Dann setzen wir

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \dim_k H^0(X, \mathcal{F}) - \dim_k H^1(X, \mathcal{F})$$

Es sei $X = \mathbb{P}^1_k$. Es sei $\eta \in X$ der allgemeine Punkt. Der Rang von $\mathcal{F}$ ist $\dim_{\kappa(\eta)} \mathcal{F}_\eta$. Der Grad von $\mathcal{F}$ ist durch die folgende Gleichung definiert

$$\chi(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}(m)) = (m+1)\,\mathrm{Rang}\,\mathcal{F} + \deg \mathcal{F}.$$

Für $m = 1$ ist dies der Riemann-Roch für $\mathbb{P}^1$. Die Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ hat den Grad n. Man berechnet den Rang, indem man sich auf den Fall einer Wolkenkratzergarbe beschränkt.

Proposition 4 *Es sei $f : X \to \mathbb{P}^1$ eine Kurve. Es sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann setzt man:*

$$\mathrm{Rang}_X \mathcal{F} = (\mathrm{Rang}_{\mathbb{P}^1} f_*\mathcal{F})(\mathrm{Rang}_{\mathbb{P}^1} f_*\mathcal{O}_X)^{-1},$$

$$\deg_X \mathcal{F} = \deg_{\mathbb{P}^1} f_*\mathcal{F} - \mathrm{Rang}_X \mathcal{F} \deg_{\mathbb{P}^1} f_*\mathcal{O}_X.$$

Diese Funktionen sind additiv in $\mathcal{F}$. Es gilt der Formel von Riemann-Roch:

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \chi(X, \mathcal{O}_X) \cdot \mathrm{Rang}_X \mathcal{F} + \deg_X \mathcal{F}.$$

Proposition 5 *(Projektionsformel) Es sei $f : X \to S = \mathrm{Spec}\, A$ ein quasicompakter separierter Morphismus. Es sei $\mathcal{L}$ ein A-flacher quasicohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Es sei $\mathcal{M}$ ein quasicohärenter $\mathcal{O}_S$-Modul.*

Wenn $\mathcal{M}$ ein ein flache $\mathcal{O}_S$-Modul ist, so hat man für alle $p \geq 0$ einen kanonischen Isomorphismus

$$R^p f_*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M} \to R^p f_*(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{M}). \tag{2}$$

Es sei $\mathcal{M}$ nicht notwendig flach. Es sei $p_0 \in \mathbb{N}$, so dass $R^p f_*\mathcal{L}$ für alle $p \geq p_0$ ein flacher $\mathcal{O}_S$-Modul ist. Dann hat man ebenfalls einen kanonischen Isomorphismus (2) für alle $p \geq p_0$.

Proposition 6 *Es sei A ein Ring und $X = \mathbb{P}^d_A$ der projektive Raum. Es sei $\mathcal{D}^+(\mathcal{O}_X)$ die derivierte Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln. Es sei $\omega = \mathcal{O}_X(-d-1)$.*

Es sei $F^\cdot$ ein beschränkter Komplex quasicohärenter $\mathcal{O}_X$-Moduln und es sei $G^\cdot$ ein nach unten beschränkter Komplex quasikohärenter $\mathcal{O}_S$-Moduln.

Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^+(\mathcal{O}_X)}(F^\cdot, \omega \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*G^\cdot[d]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^+(\mathcal{O}_S)}(Rf_*F^\cdot, G^\cdot). \tag{3}$$

Der Isomorphismus (3) wird durch einen kanonischen Isomorphismus induziert:

$$Rf_*(\omega \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*G^\cdot[d]) \to G^\cdot. \tag{4}$$

Es sei $\iota : Y \to X$ eine abgeschlossene Einbettung. Es sei M ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann existiert ein $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{N}$ auf Y, so dass

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\iota_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{M}) = \iota_*\mathcal{N}$$

ein Isomorphismus von $\iota_*\mathcal{O}_Y$-Moduln ist. Wir schreiben

$$\breve{\iota}^!\mathcal{M} := \mathcal{N}.$$

Der Funktor $\breve{\iota}^!$ ist rechtsadjungdiert zum Funktor ι_*:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}, \breve{\iota}^!\mathcal{M}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\iota_*\mathcal{L}, \mathcal{M}).$$

Der Funktor $\breve{\iota}^!$ bildet injektive $\mathcal{O}_X$-Moduln auf injektive $\mathcal{O}_Y$-Moduln ab. Man hat eine derivierte Form des letzten Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^+(\mathcal{O}_Y)}(L^\cdot, R\breve{\iota}^!M^\cdot) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^+(\mathcal{O}_X)}(\iota_*L^\cdot, M^\cdot).$$

Es sei $Y \to X$ ein lokal vollständiger Durchschnitt der Kodimension r. Es sei $\mathcal{I}$ die Idealgarbe dieser abgeschlossenen Einbettung. Es sei $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus:

$$R\breve{\iota}^!\mathcal{E} \cong \wedge^r(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}.$$

Proposition 7 *(Grothendieck-Dualität) Es sei A ein Ring. Es sei $g : Y \to$ Spec A ein projektiver Morphismus. Dann gibt es einen Funktor*

$$Rg^! : \mathcal{D}^+(\mathcal{O}_S) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{O}_Y)$$

mit folgender Eigenschaft: Es sei $F^\cdot$ ein beschränkter Komplex von $\mathcal{O}_Y$-Moduln dessen Kohomologie quasikohärent ist. Es sei $G^\cdot$ ein nach unten beschränkter Komplex quasikohärenter $\mathcal{O}_S$-Moduln.

Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^+(\mathcal{O}_Y)}(F^\cdot, Rg^!G^\cdot) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^+(\mathcal{O}_S)}(Rg_*F^\cdot, G^\cdot). \tag{5}$$

Es $Y \subset \mathbb{P}^d_A$ ein lokal vollständiger Durchschnitt ist, der lokal von einer regulären Folge aus r Elementen erzeugt wird. Es sei $e = d - r$. Dann existiert eine invertierbare Garbe ω_Y auf Y, so dass für jeden Komplex endlich erzeugter lokal freier Garben $G^\cdot$ auf S

$$Rg^!G^\cdot = g^*G \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_Y[e].$$

Man nennt ω_Y die dualisierende Garbe. Wenn Y glatt ist, so gilt

$$\omega_Y \cong \wedge^e\Omega^1_{Y/S}.$$

Es sei Y ein lokal vollständiger Durchschnitt wie in der Proposition und es sei $A = k$ ein Körper. Es sei $\mathcal{F}$ ein quasicohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul. Dann impliziert die Proposition die Existenz eines kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Ext}^{e-i}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \omega_Y) \to H^i(Y, \mathcal{F})^\wedge. \tag{6}$$

Wenn $\mathcal{F}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_Y$-Modul ist die linke Seite von (6) isomorph zu $H^{e-i}(Y, \mathbb{H}om(\mathcal{F}, \omega_Y)$. Die Formel nennt man in dieser Form Serre-Dualität.

Die Proposition 6 ist ein Spezialfall dieses Satzes. Mit den Bezeichnungen dort gilt:

$$Rf^! G^\cdot = \omega_{\mathbb{P}^d} \otimes f^* G^\cdot[d].$$

Bemerkung: Die Gruppen in der Formel (5) ändern sich nicht, wenn man die derivierten Kategorien $\mathcal{D}^+(\mathcal{O}_Y)$ und $\mathcal{D}^+(\mathcal{O}_s)$ durch die derivierten Kategorien der quasikohärenten $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\mathcal{D}^+_{qcoh}(\mathcal{O}_Y)$ und $\mathcal{D}^+_{qcoh}(\mathcal{O}_S)$ ersetzt.