Übung 3

Satz 0.1 *Es sei K/F eine quadratische Galoiserweiterung. Wir bezeichen mit $a \mapsto \bar{a}$ den nichtrivialen Automorphismus von K über F. Es seien*

$$A \in M(\ell \times n, K), \quad B \in M(\ell \times n, K)$$

Matrizen.

Dann hat das Gleichungssystem

$$Ax + B\bar{x} = 0 \tag{1}$$

genau dann eine nichtriviale Lösung $x \in K^n$, wenn es eine nichttriviale Lösung $x_1, x_2 \in K^n$ der folgenden Gleichungen gibt:

$$\begin{aligned} Ax_1 + Bx_2 &= 0, \\ \bar{B}x_1 + \bar{A}x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Beweis: Wir betrachten den K-Vektorraum $K^n \oplus K^n$. Die Abbildung

$$\alpha : K^n \to K^n \oplus K^n, \quad x \mapsto (x, \bar{x})$$

ist eine Abbildung von F-Vektorräumen. Man sieht leicht, dass $\operatorname{Im} \alpha$ den Vektorraum $K^n \oplus K^n$ als K-Vektorraum erzeugt. Also ist α ein F-rationale Struktur auf dem K-Vektorraum $K^n \oplus K^n$. Die Konjugation bezüglich dieser K-rationalen Struktur ist

$$(x_1, x_2) \mapsto (\bar{x}_2, \bar{x}_1). \tag{3}$$

Die Lösungsmenge L von (2) ist ein K-Untervektorraum von $K^n \oplus K^n$, der invariant beüglich der Konjugation (3) ist. Folglich gibt es eine Basis von L, die im Bild von α liegt. Es sei $L_0 \subset K^n$ das inverse Bild von L bei α. Das ist ein F-Untervektorraum, so dass

$$\dim_F L_0 = \dim_K L. \tag{4}$$

Die Elemente von L_0 sind Lösungen der Gleichung (1). *Q.E.D.*

Korollar 0.2 *(Hilbert 90) Es sei F ein unendlicher Körper. Es seien $U_1, U_2 \in$ $\mathrm{GL}_n(K)$ zwei Matrizen, so dass*

$$U_1\bar{U}_1 = U_2\bar{U}_2 \in F^* E_n.$$

Dann existiert eine Matrix $X \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass

$$U_2 = XU_1\bar{X}^{-1}.$$

Beweis: Wir suchen zunächst Lösungen $X \in M(n \times n, K)$ der Gleichung

$$XU_1 - U_2\bar{X} = 0. \tag{5}$$

Wir behaupten, dass der F-Vektorraum der Lösungen L_0 die Dimension n^2 hat. Nach (4) genügt es die Dimension des folgenden Lösungsraums L zu berechnen:

$$\begin{aligned} X_1U_1 - U_2X_2 &= 0, \\ X_2\bar{U}_1 - \bar{U}_2X_1 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Wir wählen X_2 beliebig. Dann gilt nach der ersten Gleichung $X_1 = U_2X_2U_1^{-1}$. Wenn wir dies in die zweite Gleichung einsetzen finden wir eine weitere Gleichung für X_2

$$X_2\bar{U}_1 - \bar{U}_2U_2X_2U_1^{-1} = 0.$$

Nach unseren Voraussetzungen ist diese Gleichung automatisch erfüllt. Daher gilt $\dim_K L = n^2$. Auf dem Lösungsraum L haben wir die polynomiale Funktion $\det X_2$, die nicht identisch null ist. Also ist ihre Einschränkung auf L_0 nicht identisch 0 (LA-Vorlesung Satz 77). Deshalb existiert eine Lösung von (5), die invertierbar ist. *Q.E.D.*