Eine Bemerkung zu den Kählerdifferentialen

Es sei S ein Ring (kommutativ). Eine S-Algebra der Form $P = S[X]/(f(X))$, $f(X) \in S[X]$ nennen wir monogen. Es sei $D \subset S[X]^{\times}$ ein multiplikatives System. Den Quotientenring $T = D^{-1}P$ nennen wir quasimonogen, wenn es nicht der Nullring ist. Wir bemerken, dass $\Omega_{T/S} \cong T/f'(X)T$.

Proposition 0.1 *Es sei R eine Ring und es sei S eine R-Algebra. Es sei $T = D^{-1}(S[X]/(f(X)))$ eine quasimonogene S-Algebra. Wir bezeichnen mit u die Restklasse von X in T.*

Wenn $f'(u)$ kein Nullteiler in T ist, so ist die kanonische Abbildung

$$\Omega_{S/R} \otimes_S T \to \Omega_{T/R} \tag{1}$$

injektiv.

Wenn $f'(u)$ eine Einheit in T ist, so ist die Abbildung (1) ein Isomorphismus.

Beweis: Wir beginnen mit der Injektivität. Es genügt zu zeigen, dass für jeden injektiven T-Modul I die folgende Abbildung surjektiv ist.

$$\mathrm{Hom}_T(\Omega_{T/R}, I) \to \mathrm{Hom}_T(\Omega_{S/R} \otimes_S T, I) \tag{2}$$

Diese Abbildung kann man in Termen von Derivationen schreiben:

$$\mathrm{Der}_R(T, I) \to \mathrm{Der}_R(S, I) \tag{3}$$

Wir müssen zeigen, dass eine beliebige Derivation $D : S \to I$ im Bild der Abbildung (3) liegt. Offensichtlich ist die Abbildung

$$\mathrm{Der}_R(T, I) \to \mathrm{Der}_R(S[X]/(f(X)), I)$$

bijektiv.

Wir betrachten ein beliebiges Element $\delta \in I$. Dann kann man D zu einer Derivation $\bar{D} : S[X] \to I$ ausdehnen, so dass $\bar{D}(X) = \delta$:

$$\bar{D}(h(X)) = h^D(u) + h'(u)\delta, \quad h(X) \in S[X]$$

Hier bezeichnet $h^D(X) \in I[X]$ das Polynom, das man durch Anwendung von D auf die Koeffizienten von $h(X)$ erhält.

Die Derivation $\bar{D}$ faktorisiert über $S[X] \to S[X]/(f(X))$ genau dann wenn:

$$f^D(u) + f'(u)\delta = 0 \tag{4}$$

Es genügt also zu beweisen, dass die Gleichung (4) eine Lösung $\delta \in I$ hat. Dafür reicht es zu sehen, dass die Abbildung $f'(u) : I \to I$ surjektiv ist. Das folgt, indem man den exakten Funktor $\mathrm{Hom}(?, I)$ auf die Injektion $f'(u) : T \to T$ anwendet.

Wenn $f'(u) \in T$ eine Einheit ist, so ist $\delta \in I$ durch (4) eindeutig bestimmt. Also ist in diesem Fall (3) auch injektiv. Daraus folgt die letzte Behaubtung der Proposition. *Q.E.D.*

Allgemeiner betrachten wir Polynome $f_1, \ldots, f_m \in S[X_1, \ldots, X_n]$. Es sei $T = S[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots f_m)$. Wir betrachten die folgende Matrix J:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial X_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial X_2} \\ & & \ldots & \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_n} & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

Wenn man T^m resp. T^n als Modul der Spaltenvektoren auffasst,so erhält man eine lineare Abbildung:

$$J : T^m \to T^n \tag{5}$$

Corollary 0.2 *Wir setzen voraus, dass die Abbildung (5) injektiv ist. Dann ist die Abbildung:*

$$\Omega_{S/R} \otimes_S T \to \Omega_{T/R}$$

ebenfalls injektiv.

Beweis: Wie im letzten Beweis müssen wir eine Derivation $D : S \to I$ in einen injektiven T-Modul I auf T fortsetzen. Für beliebige $\delta_1, \ldots \delta_n \in I$ erhalten wir eine Erweiterung von D zu einer Derivation $\bar{D} : S[X_1, \ldots, X_n] \to I$:

$$\bar{D}h = f^D + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial X_j} \delta_j, \quad h \in S[X_1, \ldots, X_n]$$

Damit $\bar{D}$ zu einer Derivation von T faktorisiert, müssen die δ_j die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$f_i^D + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \delta_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Lösungen $\delta_j \in I$ dieser Gleichungen kann man finden, wenn die Matrix:

$$J^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ & & \cdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \frac{\partial f_m}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

eine Surjektion $J^* : I^n \to I^m$ definiert. Aber das ist klar, da man diese Abbildung aus der Injektion (5) durch Anwendung des Funktors $\mathrm{Hom}(?, I)$ erhält. *Q.E.D.*

Bemerkung: Es sei $n = m$. Dann ist die Abbildung (5) sicherlich injektiv, wenn $\det J$ kein Nullteiler in T ist. Das sieht man, indem man mit der adjungdierten Matrix zu J multipliziert.

Als Anwendung betrachten wir den Schachtlungssatz für die Differente. Es sei $R \to S$ eine Erweiterung von diskreten Bewertungsringen, so dass die Erweiterung der Quotientenkörper $K \to L$ endlich separabel ist. Dann ist S als Lokalisierung des ganzen Abschlusses $\tilde{S}$ von R in L. Da $\Omega_{L/K} = 0$ ist $\Omega_{\tilde{S}/R}$ von endlicher Länge. Folglich ist $\Omega_{S/R}$ ein endlicher S-Modul endlicher Länge $\ell(\Omega_{S/R})$. Wenn π_S ein Primelement von S bezeichnet, so definieren wir die Differente als das folgende Ideal:

$$\vartheta_{S/R} = \pi_S^{\ell(\Omega_{S/R})} S$$

In dem speziellen Fall, wo $S = D^{-1}(R[X]/(f(X)))$ quasimonogen ist (vgl. Serre, Corps Locaux III §7 Proposition 12) gilt $\Omega_{S/R} = S/f'(X)S$ und folglich $\vartheta_{S/R} = f'(X)S$.

Proposition 0.3 *Es seien $R \to S \to T$ Erweiterungen von diskreten Bewertungsringen. Die entsprechenden Erweiterungen der Quotientenkörper $K \to L \to E$ seien endlich separabel. Wir nehmen an, dass T/S eine quasimonogene Erweiterung ist.*

Dann gilt:

$$\vartheta_{T/S}\vartheta_{S/R} = \vartheta_{T/R}$$

Beweis: In der Tat, nach dem Theorem hat man eine exakte Sequenz:

$$0 \to \Omega_{S/R} \otimes_S T \to \Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S} \to 0$$

Wir bezeichnen mit π_T resp. π_S Primelemente von T resp. S. Es sei ℓ_T die Länge als T-Modul und ℓ_S die Länge als S-Modul. Es gilt

$$\ell_S(\Omega_{S/R})e(T/S) = \ell_T(\Omega_{S/R} \otimes_S T).$$

Hier bezeichnet $e(T/S)$ den Verzweigungsindex. Daraus erhalten wir

$$\vartheta_{S/R}T = \pi_S^{\ell_S(\Omega_{S/R})}T = \pi_T^{e(T/S)\ell_S(\Omega_{S/R})} = \pi_T^{\ell_T(\Omega_{S/R}\otimes_S T)}.$$

Die Proposition folgt weil die Länge additiv ist. *Q.E.D.*