

Übung 9

Satz 0.1 *Es sei R ein (kommutativer) Ring. Es seien $R[\underline{X}] = R[X_1, \dots, X_d]$ und $R[\underline{Y}] = R[Y_1, \dots, Y_d]$ zwei Polynomringe in d Unbestimmten. Es seien $n_i \geq 2$, $i = 1, \dots, d$ natürliche Zahlen. Es seien $h_i(\underline{X}) \in R[\underline{X}]$, für $i = 1, \dots, d$, Polynome vom totalen Grad totdeg $h_i < n_i$. Wir betrachten den R -Algebrahomomorphismus*

$$R[\underline{Y}] \rightarrow R[\underline{X}], \quad Y_i \mapsto X_i^{n_i} + h_i(\underline{X}). \quad (1)$$

Dann sind die Monome

$$X_1^{u_1} \cdot X_2^{u_2} \cdot \dots \cdot X_d^{u_d}, \quad 0 \leq u_i < n_i \quad (2)$$

eine Basis des $R[\underline{Y}]$ -Moduls $R[\underline{X}]$.

Lemma 0.2 *Die Monome (2) erzeugen $R[\underline{X}]$ als $R[\underline{Y}]$ -Modul*

Beweis: Es sei $M \subset R[\underline{X}]$ der $R[\underline{Y}]$ -Untermodule, der von den Monomen (2) erzeugt wird. Wir zeigen durch Induktion nach m , dass alle Monome

$$X_1^{u_1} \cdot X_2^{u_2} \cdot \dots \cdot X_d^{u_d}, \text{ so dass } u_1 + \dots + u_d = m$$

in M liegen. Für $m = 1$ ist das klar. Für den Induktionsschritt betrachten wir ein Monom $X_1^{u_1} \cdot X_2^{u_2} \cdot \dots \cdot X_d^{u_d}$, so dass $u_1 + \dots + u_d = m + 1$. Wir zeigen, dass dieses Monom in M liegt. Wenn $u_i < n_i$ für alle Exponenten, so ist nichts zu beweisen. Sonst können wir nach Umordnung der Variablen $u_1 \geq n_1$ annehmen. Dann gilt

$$\begin{aligned} X_1^{u_1} \cdot X_2^{u_2} \cdot \dots \cdot X_d^{u_d} &= X_1^{n_1} (X_1^{u_1 - n_1} \cdot X_2^{u_2} \cdot \dots \cdot X_d^{u_d}) = \\ &= (Y_1 - h_1(\underline{X})) (X_1^{u_1 - n_1} \cdot X_2^{u_2} \cdot \dots \cdot X_d^{u_d}). \end{aligned}$$

Der totale Grad von $h_1(\underline{X}) X_1^{u_1 - n_1} \cdot X_2^{u_2} \cdot \dots \cdot X_d^{u_d}$ ist $\leq (n_1 - 1) + (m + 1 - n_1) = m$. Daher liegt diese Polynom in M . Daraus folgt leicht die Behauptung. *Q.E.D.*

Lemma 0.3 *Es sei $f_i = X_i^{n_i} + h_i(\underline{X})$ mit den Bezeichnungen des Satzes. Der R -Modul*

$$R[\underline{X}]/(f_1, \dots, f_d) \quad (3)$$

frei vom Rang $n_1 \cdot \dots \cdot n_d$ und hat die Monome (2) als Basis.

Beweis von Lemma 0.3: Wir benutzen algebraische Geometrie, nämlich den Satz von Bezout. (Schafarevic, Alg.Geometrie Teil I, Kap. IV, §§1, 2, Moskau 1972).

Es folgt aus Lemma 0.2, dass (3) als R -Modul von den Monomen (2) erzeugt wird.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo $R = k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Es sei $h_i = \sum_{g < n_i} h_i^{(g)}$, wobei $h_i^{(g)}$ ein homogenes Polynom vom Grad g ist. Wir homogenisieren die Polynome f_i :

$$F_i = Z_i^{n_i} + \sum_{g < n_i} h_i^{(g)}(Z_1, \dots, Z_d) Z_0^{n_i - g}.$$

$D_i \subset \mathbb{P}_k^d = \text{Proj } k[Z_0, Z_1, \dots, Z_d]$ der Divisor $F_i = 0$. Offensichtlich gilt:

$$(\cap_{i=1}^d D_i) \cap \{Z_0 = 0\} = \emptyset.$$

Also gilt

$$(\cap_{i=1}^d D_i) \subset \text{Spec } k[X_1, \dots, X_d] = \mathbb{A}_k^d \subset \mathbb{P}_k^d,$$

wobei $X_i = Z_i/Z_0$. Da (3) eine endliche k -Algebra ist, besteht $(\cap_{i=1}^d D_i)$ aus endlich vielen Punkten, d.h. die Divisoren schneiden sich eigentlich. Nach dem Satz von Bezout gilt

$$n_1 \cdot \dots \cdot n_d = (D_1 \cdot \dots \cdot D_d) = \sum_x \dim_k \mathcal{O}_{x, \mathbb{P}_k^d} / (f_{1,x}, \dots, f_{d,x}). \quad (4)$$

Hier durchläuft x die Punkte von $(\cap_{i=1}^d D_i)$ und $f_{i,x}$ ist eine lokale Gleichung des Divisors D_i im Punkte x . Die erste Gleichung folgt, weil $D_i \equiv n_i H$ linear equivalent zum Vielfachen jeder Hyperebene H ist. Die zweite Gleichung ist die Definition des Schnittprodukts in dem Fall, wo sich die Divisoren eigentlich schneiden. Es sei $\mathfrak{m}_x \subset k[\underline{X}]$ das maximale Ideal, welches dem Punkt x entspricht. Dann gilt

$$n_1 \cdot \dots \cdot n_d = \sum_x \dim_k k[\underline{X}]_{\mathfrak{m}_x} / (f_1, \dots, f_d) k[\underline{X}]_{\mathfrak{m}_x} = \dim_k k[\underline{X}] / (f_1, \dots, f_d)$$

Die letzte Gleichung gilt, weil für den artinschen Ring $A = k[\underline{X}] / (f_1, \dots, f_d)$ mit den maximalen Idealen \mathfrak{m}_x gilt, dass

$$A = \prod_x A_{\mathfrak{m}_x}.$$

Da die Monome (2) ein Erzeugendensystem des k -Vektorraums A sind, folgern wir, dass sie eine Basis bilden. Damit ist das Lemma in dem Fall bewiesen, wo $R = k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Der Fall eines beliebigen Körpers folgt, indem man zum algebraischen Abschluss übergeht.

Es ist klar, dass das Lemma für jede R -Algebra S gilt, wenn sie für R gilt. Deshalb kann man sich auf den Fall beschränken, wo $R = \mathbb{Z}[\underline{C}]$ ein Polynomring ist, wobei die Unbestimmten \underline{C} die Koeffizienten der Polynome $h_i(\underline{X})$ sind. Insbesondere können wir annehmen, dass der Ring R reduziert ist. Für jeden Homomorphismus $R \rightarrow k$ in einen Körper ist

$$R[\underline{X}]/(f_1, \dots, f_d) \otimes_R k$$

ein k -Vektorraum der Dimension $n_1 \cdot \dots \cdot n_d$. Wir folgern nach Mumford, Abelian varieties, Lemma 1, §5, dass $R[\underline{X}]/(f_1, \dots, f_d)$ ein lokal freier R -Modul von Rang $n_1 \cdot \dots \cdot n_d$ ist. Daraus folgt, dass die Monome (2) eine Basis dieses R -Moduls sind. *Q.E.D.*

Beweis von Proposition 0.1: Wir beginnen mit dem Fall, wo $R = k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Jedes maximale Ideal von $k[\underline{Y}]$ ist der Kern eines Homomorphismus

$$\varphi_{\underline{c}} : k[\underline{Y}] \rightarrow k, \quad Y_i \mapsto c_i \in k.$$

Wir tensorieren (1) mit $\varphi_{\underline{c}}$:

$$k \otimes_{\varphi_{\underline{c}}, k[\underline{Y}]} k[\underline{X}] \cong k[\underline{X}]/(X_1^{n_1} + h_1 - c_1, \dots, X_d^{n_d} + h_d - c_d).$$

Der letzte k -Vektorraum hat nach Lemma 0.2 die Monome (2) als Basis. Es sei L der freie $k[\underline{Y}]$ -Modul mit der Basis \mathbf{e}_M , wobei M die Monome (2) durchläuft. Wir zeigen, dass der kanonische $k[\underline{Y}]$ -Modulepimorphismus

$$L \rightarrow k[\underline{X}], \quad \mathbf{e}_M \mapsto M \tag{5}$$

ein Isomorphismus ist. Wir haben gerade gesehen, dass dies ein Isomorphismus von k -Vektorräumen wird, wenn wir mit $k \otimes_{\varphi_{\underline{c}}, k[\underline{Y}]}$ tensorieren. Also ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset k[\underline{Y}]$ die Abbildung $L/\mathfrak{m}L \rightarrow k[\underline{X}]/\mathfrak{m}k[\underline{X}]$ ein Isomorphismus. Es sei U der Kern von (5). Dann gilt $U \subset \mathfrak{m}L$ für jedes maximale Ideal \mathfrak{m} von $k[\underline{Y}]$. Daraus folgt $U = 0$. Damit gilt der Satz, wenn $R = k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Der Fall eines beliebigen Körpers folgt, indem man zum algebraischen Abschluss übergeht.

Im allgemeinen Fall beschränkt man sich wie im Beweis von Lemma 0.3 auf den Fall $R = \mathbb{Z}[\underline{C}]$. Wir müssen zeigen, dass die Abbildung (5) mit $k = R$ injektiv ist. Das folgt, wenn wir mit dem Quotientenkörper von R tensorieren, aus dem Fall wo R ein Körper ist. *Q.E.D.*