

Die Eulergerade

Es sei ABC ein Dreieck. Es seien $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ die Seiten des Dreiecks. Es sei A' der Mittelpunkt der Seiten a , es sei B' der Mittelpunkt der Seite b und es sei C' der Mittelpunkt der Seite c .

Wir wissen, dass es eine zentrale Homothetie κ gibt, so dass

$$\kappa(A) = A', \quad \kappa(B) = B', \quad \kappa(C) = C'.$$

Der Fixpunkt S von κ liegt auf allen 3 Geraden AA' , BB' und CC' . Also ist S der Schnittpunkt aller 3 Seitenhalbierenden des Dreiecks. Da $\overrightarrow{A'B'} = -(1/2)\overrightarrow{AB}$ finden wir, dass

$$\kappa = h(S, -(1/2))$$

die zentrale Homothetie mit dem Fixpunkt S und dem Streckungsfaktor $-(1/2)$ ist. Insbesondere gilt also:

$$\overrightarrow{SA'} = -(1/2)\overrightarrow{SA}.$$

In dem gleichen Verhältnis teilt S auch die anderen Seitenhalbierenden.

Wir bezeichnen mit h_A, h_B, h_C die drei Höhen des Dreiecks und mit m_a, m_b und m_c die Mittelsenkrechten auf den Seiten a, b, c .

Die Geraden h_A und m_a sind parallel, da sie beide orthogonal zu a sind. Da $\kappa(h_A)$ parallel zu h_A ist und $A' \in \kappa(h_A)$, muss $\kappa(h_A)$ mit der Mittelsenkrechte m_a übereinstimmen. Entsprechendes gilt dann auch für die anderen Höhen:

$$\kappa(h_A) = m_a, \quad \kappa(h_B) = m_b, \quad \kappa(h_C) = m_c \tag{1}$$

Wir wissen, dass sich die Mittelsenkrechten m_a, m_b, m_c in einem Punkt M schneiden. Aus (1) sehen wir, dass sich die Höhen in dem Punkt $H = \kappa^{-1}(M)$ schneiden.

Satz 0.1 *Es sei ABC ein Dreieck. Der Schnittpunkt der Höhen H , der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden S und der Umkreismittelpunkt M liegen auf einer Geraden (Eulergerade). Es gilt:*

$$\overrightarrow{SM} = -(1/2)\overrightarrow{SH}.$$

Beweis: Das folgt unmittelbar aus der Gleichung $h(S, -(1/2))(H) = M$.