Vorlesung Winter 2009/2010
Elementare Geometrie

1 Die harmonische Lage

Definition 1 *Es seien a, b, c, d vier Punkte, die sich in einem Punkt S schneiden mögen.*

Wir nennen die Geraden a, b, c, d harmonisch, wenn die folgende Eigenschaft erfüllt ist. Es sei a_1 eine Parallele zu a. Es seien $C_1 = c \cap a_1$ und $D_1 = d \cap a_1$. Dann halbiert die Gerade b die Strecke C_1D_1. Dieser Begriff hängt von der Reihenfolge der Geraden a, b, c, d ab.

Nach dem Strahlensatz hängt dieser Begriff nicht von der Wahl der Parallele a_1 ab.

Satz 2 *Es seien a, b, c, d harmonische Geraden, die sich in S schneiden. Es sei g eine Gerade, die nicht durch S geht und die parallel zu keiner der Geraden a, b, c, d ist.*

Dann liegen die vier Schnittpunkte $A = a \cap g$, $B = b \cap g$, $C = c \cap g$ und $D = d \cap g$ in dieser Reihenfolge harmonisch.

Wenn umgekehrt a, b, c, d vier beliebige Geraden durch S sind, so dass die vier Schnittpunkte A, B, C, D mit einer Geraden g harmonisch liegen, so sind die Geraden a, b, c, d harmonisch.

Beweis: Die Geraden a, b, c, d seien harmonisch. Man zieht eine Parallele zu a durch den Punkt B. Sie möge c in dem Punkt C' und d in dem Punkt D' schneiden. Dann ergibt sich aus den Strahlensätzen:

$$\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DA}} = \frac{\overrightarrow{D'B}}{\overrightarrow{SA}} = \frac{\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{SA}} = \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{AC}} = -\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CA}}$$

Q.E.D.

Man sieht daraus, dass mit a, b, c, d auch die folgenden Geraden harmonisch liegen: a, b, d, c, b, a, c, d, b, a, d, c, c, d, a, b, c, d, b, a, d, c, a, b, d, c, b, a. In der Tat, die Aussage über die Vertauschbarkeit gilt für die Punkte A, B, C, D.