Vorlesung Winter 2009/2010
Elementare Geometrie

1 Die Inversion am Kreis

Unter einem Kreis wollen wir immer die Kreislinie verstehen und nicht die Fläche.

Satz 1 *Es sei K ein Kreis und P ein Punkt der Ebene. Man lege durch P zwei Geraden g und g', die den Kreis schneiden mögen. Es sei $K \cap g = \{A, B\}$ und $K \cap g' = \{A', B'\}$. Wenn die Gerade g den Kreis nur ein einem Punkt schneidet, so ist in der ersten Gleichung $A = B$.*

Dann gilt die Gleichung:

$$|PA||PB| = |PA'||PB'|.$$

Beweis: Man sieht das aus den Abbildungen Potenz1-3. *Q.E.D.*

Definition 2 *Es sei K ein Kreis und P ein Punkt der Ebene. Die Potenz $\mathfrak{p}(P)$ des Punktes P erhält man folgendermaßen:*

- $\mathfrak{p}(P) = |PA||PB|$, *wenn P außerhalb von K liegt.*
- $\mathfrak{p}(P) = -|PA||PB|$, *wenn P innerhalb von K liegt.*
- $\mathfrak{p}(P) = 0$, *wenn $P \in K$.*

Im zweiten Fall hat die Potenz die folgende Interpretation: Man betrachtet die Halbkugel mit dem Äquator K über der Ebene. Es sei h die Höhe der Kugel über dem Punkt P. Dann gilt $\mathfrak{p}(P) = -h^2$.

Es sei d der Abstand des Punktes P zum Mittelpunkt M des Kreises K. Der Radius des Kreises sei r. Wenn man die Gerade betrachtet, die P mit dem Mittelpunkt verbindet, so sieht man, dass in jedem Fall

$$\mathfrak{p}(P) = (d + r)(d - r). \tag{1}$$

Wir wählen in der Ebene ein $x - y$-Koordinatensystem. Es seien a, b, c fest gewählte reelle Zahlen. Die Menge aller Punkte deren Koordinaten (x, y) der folgenden Gleichung genügen

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \tag{2}$$

ist entweder eine Kreis, oder ein Punkt, oder die leere Menge. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt (m,n) und dem Radius r besteht aus den Punkten, die der folgenden Gleichung genügen:

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 - r^2 = 0.$$

Wenn $P = (x,y)$, so gilt:

$$\mathfrak{p}(P) = (x-m)^2 + (y-n)^2 - r^2.$$

Das erinnert daran, wie man den Abstand eines Punktes zu einer Geraden aus der Hesseschen Normalform erhält.

Es seien K_1 und K_2 zwei Kreise. Wir bezeichnen die Potenz eines Punktes P bezüglich des Kreises K_1 mit $\mathfrak{p}_{K_1}(P)$ und die Potenz des Kreise bezüglich K_2 mit $\mathfrak{p}_{K_2}(P)$.

Satz 3 *(Die radikale Achse) Es seien K_1 und K_2 zwei Kreise. Dann ist der geometrische Ort $\mathfrak{r}$ aller Punkte P, deren Potenz bezüglich K_1 und bezüglich K_2 die gleiche ist, eine Gerade. Wir können schreiben*

$$\mathfrak{r} = \{P | \mathfrak{p}_{K_1}(P) = \mathfrak{p}_{K_1}(P)\}$$

Beweis: Die Gleichungen von K_1 und K_2 seien:

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 & = & 0, \\ x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 & = & 0. \end{array}$$

Ein Punkt $P = (x,y)$ liegt auf $\mathfrak{r}$ genau dann, wenn

$$x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2.$$

Da sich die quadratischen Terme wegheben, ist dies die Gleichung einer Geraden. *Q.E.D.*

Korollar 4 *Es sei g die Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden Kreise verbindet. Dann steht die radikale Achse senkrecht auf g.*

Beweis: Bei der Spieglung an der Geraden g wird die radikale Achse auf sich selbst abgebildet. *Q.E.D.*

Korollar 5 *Es seien K_1, K_2 und K_3 drei Kreise. Es sei $\mathfrak{r}_3$ die radikale Achse der Kreise K_1 und K_2. Es sei $\mathfrak{r}_2$ die radikale Achse der Kreise K_2 und K_1. Es sei $\mathfrak{r}_1$ die radikale Achse der Kreise K_3 und K_2.*

Dann sind diese Achsen parallel, oder schneiden sich in einem Punkt.

Wenn sich zwei Kreise K_1 und K_2 in zwei Punkten A und B schneiden, so ist die radikale Achse die Verbindungsgerade von A und B. Sonst zeichnet man einen dritten Kreis, der beide Kreise schneidet, um die radikale Achse zu finden.

Aufgabe: Es sei s eine reelle Zahl. Es sei K ein Kreis. Man finde einen Punkt P, so dass $\mathfrak{p}_K(P) = s^2$.

Lösung: Man legt eine beliebige Tangente an den Kreis und trägt auf ihr eine Strecke der Länge s vom Berührungspunkt aus ab. Der andere Endpunkt der Strecke ist der gesuchte Punkt P.

Definition 6 *Es sei K ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Zwei Punkte P und P' heißen invers bezüglich K, wenn sie auf einem Strahl mit dem Anfangspunkt M liegen und wenn*

$$|MP||MP'| = r^2.$$

Einer der beiden Punkte muss dann innerhalb des Kreises K liegen und der andere außerhalb.

Unter der Voraussetzungen der Definition sei C ein Kreis, der durch P und P' geht. Dann hat M bezüglich C die Potenz r^2. Wenn man von M aus eine Tangente an der Kreis legt, so hat ist der Abstand von M zum Brührungspunkt T gleich r. Also ist T ein Schnittpunkt von K und C. Das führt uns auf die folgende Definition:

Definition 7 *Es seien C und K zwei Kreise, die sich in zwei Punkten A und B schneiden mögen. Die Kreise heißen orthogonal, wenn der Radius von C mit dem Endpunkt A und der Radius von K mit dem Endpunkt A aufeinander senkrecht stehen. Aus Symmetriegründen gilt das Gleiche dann auch für den Punkt B.*

Es sei r der Radius von K und s der Radius von C. Die Mittelpunkte der Kreis K bzw. C seien M bzw. N.

Der Radius von C mit dem Endpunkt A ist eine Tangente des Kreises K. Also gilt:

$$\mathfrak{p}_K(N) = s^2 \quad \text{und analog} \quad \mathfrak{p}_C(M) = r^2.$$

Satz 8 *Es sei K ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Es seien P und P' zwei inverse Punkte bezüglich K.*

Dann ist jeder Kreis C durch die Punkte P und P' zum Kreis K orthogonal.

Umgekehrt sei I ein Kreis durch den Punkt P der zu dem Kreis K orthogonal ist. Dann geht I auch durch den Punkt P'.

(Abbildung: Der inverse Punkt)

Es seien C und C' zwei Kreise. Es sei $\varkappa = h(O, \lambda)$ eine zentrale Homothetie mit dem Zentrum O, so dass $\varkappa(C) = C'$. Es sei p die Potenz des Punktes O bzgl. des Kreises C. Dann gilt $I(O, p)(C) = C$. Die Inversion

$$\iota = \varkappa \circ I(O, p)$$

hat das Zentrum O und bildet C auf C' ab. Es sei l eine Gerade durch O, die C in zwei verschiedenen Punkten A und B schneidet. Es sei

$$\iota(A) = A', \quad \text{und} \quad \iota(B) = B'.$$

Dann gilt:

$$\varkappa(A) = B', \quad \text{und} \quad \varkappa(B) = A'.$$

In der Tat, es sei $\varkappa(A) = A'$. Dann ist A ein Fixpunkt der Inversion $I(O, p)$. Fixpunkte gibt es nur, wenn $p > 0$, d.h. wenn O außerhalb es Kreises C liegt. Dann sind die Fixpunkte gerade die Berührungspunkte der beiden Tangenten von O an den Kreis C. Da $A \neq B$ ist A kein Fixpunkt. Also gilt $\varkappa(A) \neq A'$.

In der Literatur nennt man die Punkte A und A' antihomologe Punkte der beiden Kreise und die Punkte A und B' homologe Punkte.