Bielefeld, den 24.Juli 2009

# Klausur Elementare Geometrie

**Alle Lösungen müssen begründet werden !**

1) Es seien $A$ und $B$ zwei Punkte, die außerhalb einer Geraden $g$ liegen. Man konstruiere einen Punkt $H \in g$, so dass $\angle AHB = 90^o$.

2) Es sei ein gleichschenkliges Dreieck $ABC$ gegeben, so dass

$$|AB| = |AC|.$$

Man wähle einen beliebigen Punkt $F$ auf der Seite $\overline{BC}$. Man fälle von $F$ das Lot auf die Gerade $AB$. Der Fußpunkt sei $B'$. Man fälle von $F$ das Lot auf die Gerade $AC$. Der Fußpunkt sei $C'$.

Man beweise, dass die Länge:

$$|FB'| + |FC'|$$

unabhängig davon ist, wie man den Punkt $F$ gewählt hat.

(Hinweis: Man spiegele die Figur an der Geraden $BC$.)

3) Es sei $g$ eine Gerade. Wir bezeichnen die Spieglung an $g$ mit $s_g$. Es seien $A$ und $B$ zwei verschiedene Punkte und es sei $\tau = \overrightarrow{AB}$ die Translation. Man betrachte das folgende Kompositum von Isometrien:

$$s_g \circ \tau \circ s_g.$$

Ist dies Kompositum eine Translation, eine Drehung, eine Spieglung, oder eine Gleitspieglung?

4) Es sei ein Billiardtisch mit den Banden $a$ und $b$ gegeben, auf dem eine Billiardkugel $B$ liegt. Ein Spieler soll die Kugel $B$ so über die Banden $a$ und $b$ spielen, dass sie zu ihrem Augangspunkt zurückkehrt.

Man konstruiere den Weg der Kugel mit Zirkel und Lineal.

5) Es sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Eine Abbildung (Funktion)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

heißt affin, wenn es reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = ax + b.$$

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine affine Abbildung. Beweisen Sie, dass für drei beliebige aber verschiedene Zahlen $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{f(x_0) - f(x_2)} = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2}. \tag{1}$$

Es sei umgekehrt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive Abbildung, so dass für je drei verschiedene reelle Zahlen $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ die Gleichung (1) stets erfüllt ist. Beweisen Sie, dass $f$ affin ist.

6) Man zeichne eine Sehne in den Kreis $K$ ein, die zur Strecke $\overline{AB}$ parallel ist und deren Länge $|AB|$ ist.

7) Es sei $ABC$ ein Dreieck. Es sei $w$ die Winkelhalbierende des Winkels $\angle BAC$. Die Winkelhalbierende $w$ möge die Seite $\overline{BC}$ in dem Punkt $F$ treffen. Man beweise die Gleichung:

$$|AB| : |AC| = |FB| : |FC|$$

**Man beachte die Arbeitsblätter zu den Aufgaben 1,2,3,4,6 und 7**