Bielefeld, den 19. Januar 2010

Elementare Geometrie 2
Probeklausur

Alle Lösungen müssen begründet werden !

1) Es sei K ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Es sei A ein Punkt. Man konstruiere den inversen Punkt A' zu A bezüglich des Kreises K.

2) Es seien K_1, K_2 und K_3 drei verschiedene Kreise. Zu je zwei dieser Kreise gehört eine radikale Achse. Man beweise, dass sich diese drei radikalen Achsen in einem Punkt scheiden oder dass sie parallel sind.

3) Gegeben seien zwei konzentrische Kreise. Man konstruiere eine Gerade g, so dass die Sehne, die von dem kleineren Kreis ausgeschnitten wird, halb so groß ist wie die Sehne, die von dem größeren Kreis ausgeschnitten wird.

4) Man formuliere und beweise den Trapezsatz. (Abbildung)

5) Es seien $\lambda > 0$ und $p > 0$ zwei reelle Zahlen. Es sei $I(M,p)$ die Inversion mit dem Zentrum M und der Potenz p. Es sei $h(M,\lambda)$ die Homothetie mit dem Streckungsfaktor λ und dem Zentrum M. Man beweise die Gleichungen:

$$\begin{aligned} h(M,\lambda) \circ I(M,p) &= I(M,\lambda p) \\ I(M,p) \circ h(M,\lambda) &= I(M,p/\lambda) \end{aligned}$$

6) Es sei c eine reelle Zahl, die von 1 und 0 verschieden ist. Man finde eine Möbiustransformation T, so dass

$$T(0) = \infty, \quad T(\infty) = 0, \quad T(c) = 1.$$

Beweisen Sie, dass $T \circ T = \mathrm{id}$.

7) Es seien $g \cup \{\infty\}$ und $g' \cup \{\infty\}$ zwei Geraden. Es seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf $g \cup \{\infty\}$. und es seien A', B', C' drei verschiedene Punkte auf $g' \cup \{\infty\}$. Dann gibt es genau eine projektive Transformation $T : g \cup \{\infty\} \to g' \cup \{\infty\}$, so dass $T(A) = A'$, $T(B) = B'$, $T(C) = C'$.

(siehe Abbildung, der Punkt $C' = \infty$.)

Man konstruiere für einen weiteren Punkt $D \in g \cup \{\infty\}$ den Punkt $T(D)$.