

Lemma 0.1 *Es sei \overline{AB} eine Sehne in einem Kreis K . Es sei g die Parallele zu AB durch den Mittelpunkt M von K . Wir betrachten die Spiegelung s_g an der geraden g . Es sei $A' = s_g(A)$ und $B' = s_g(B)$.*

Dann sind die Strecken $\overline{AB'}$ und $\overline{A'B}$ Durchmesser des Kreises.

Beweis: AA' und BB' stehen beide senkrecht auf g und sind daher parallel. Da AB und g parallel sind, sind auch ihre Bilder $A'B'$ und g unter s_g parallel. Also sind auch AB und $A'B'$ parallel. Damit ist $ABB'A'$ ein Parallelogramm. Da AA' senkrecht auf g steht, steht AA' auch senkrecht auf der Parallelen AB .

Also ist $ABB'A'$ ein Rechteck. Die vier Punkte liegen daher auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalen AB' und $B'A$ ist. Dieser Kreis muss mit K übereinstimmen, da durch drei Punkte genau ein Kreis geht. Q.E.D.

Bemerkung: Man kann das Lemma auch aus dem Satz des Thales folgern.

Proposition 0.2 *Gegeben sei ein Kreis K mit dem Mittelpunkt M . Es sei \overline{AB} eine Sehne von K und es sei S ein Punkt des Kreises, der von A und B verschieden ist. Dann gilt:*

$$2\angle ASB = \angle AMB$$

Wir nennen $\angle AMB$ den Zentriwinkel über der Sehne \overline{AB} und $\angle ASB$ einen Peripheriewinkel über der Sehne \overline{AB} .

Beweis: Es sei a der Strahl \overrightarrow{AS} und b der Strahl \overrightarrow{BS} .

Es sei g die Parallele zu a durch den Mittelpunkt und h die Parallele zu b durch den Mittelpunkt. Es sei S' die Antipode zu S . Die Geraden $s_g(AS)$ und $s_h(BS)$ gehen nach dem Lemma durch den Punkt S' . Also gilt $s_g(A) = S'$ und $s_h(B) = S'$. Wir finden

$$s_h \circ s_g(A) = B$$

Also ist $s_h \circ s_g$ die Drehung um den Zentriwinkel.

$$\vartheta(s_h \circ s_g) = \angle AMB$$

Es sei $a' \subset g$ der Strahl mit dem Anfang M der parallel zu a ist und es sei $b' \subset h$ der Strahl mit dem Anfang M , der parallel zu B ist.

Dann wissen wir:

$$\vartheta(s_h \circ s_g) = 2\angle(a', b') = 2\angle(a, b).$$

Q.E.D.

Corollary 0.3 *Es seien \overline{AB} und $\overline{A'B'}$ zwei Sehnen in einem Kreis. Es seien S und S' zwei Punkte auf dem Kreis, so dass*

$$\angle ASB = \angle AS'B'.$$

Dann sind die Sehnen gleich lang.

Beweis: Das ist klar, da unter der Voraussetzung die Zentriwinkel gleich groß sind.