Die projektive Ebene

Definition 1 *Es sei O ein Punkt des Raumes. Die Menge $\mathbb{P}$ aller Geraden durch O nennt man eine* projektive Ebene.

Eine Gerade s durch O, d.h. ein Element der Menge $\mathbb{P}$ nennt man einen *projektiven Punkt*. Wir schreiben anstelle von s auch $\mathbb{P}(s)$, wenn wir betonen wollen, dass wir s als Element von $\mathbb{P}$ betrachten. In diesem Fall vergessen wir, dass s selber eine Menge von Punkten ist. (Figur 51)

Man kann den Punkt O als den Punkt interpretieren, wo sich das Auge eines Malers befindet (*Augpunkt*). Ein Punkt der projektiven Ebene ist dann als Sehstrahl durch den Punkt O zu interpretieren. Wir verwenden den Begriff Sehstrahl, obwohl damit eine Gerade gemeint ist.

Wenn $A \neq O$ ein Punkt des Raumes ist, so gibt es die Gerade s_A die die Punkte O und A verbindet. Eine *Karte* (oder Leinwand) ist eine Ebene L im Raum, die den Punkt O nicht enthält. Wenn s_A die Ebene L schneidet, so nennen wir den Schnittpunkt $s_A \cap L$ das Bild von A und bezeichnen es mit A'. Man nennt die Zuordnung $A \mapsto A'$ eine Perspektive. Ein Punkt der auf der Ebene V liegt, die durch O geht und parallel zu L ist, wird bei der Perspektive nicht abbgebildet. (Figur 52)

Vom Standpunkt des Malers sind zwei Punkte auf dem gleichen Sehstrahl nicht zu unterscheiden, da sie stets auf den gleichen Punkt der Leinwand abgebildet werden. Das ist eine Rechtfertigung Sehstrahlen als projektive Punkte zu bezeichnen.

Wir nehmen aus der projektive Ebene alle Punkte t heraus, so dass der Sehstrahl t in der Ebene V liegt und bezeichnen diese Teilmenge der projektiven Ebene mit $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(V)$. Die *Perspektive* ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(V) & \to & L \\ s & \mapsto & s \cap L \end{array}$$

Definition 2 *Es sei E eine Ebene, die den Punkt O enthält. Dann nennt man die Menge aller Geraden von E, die durch den Punkt O gehen eine* projektive Gerade $\mathbb{P}(E)$.

Es sei l eine Gerade in der Ebene E, die nicht durch den Punkt O geht. Jedem Punkt $A \in l$ entspricht ein projektiver Punkt $s_A \in \mathbb{P}(E)$. Wie oben ist s_A der Sehstrahl OA. Wir erhalten eine injektive Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \iota : l & \rightarrow & \mathbb{P}(E). \\ A & \mapsto & s_A \end{array} \tag{1}$$

Es sei s_∞ die Gerade durch O, welche parallel zu l ist. Der projektive Punkt $\mathbb{P}(s_\infty)$ liegt nicht im Bild der Abbildung (1). Alle anderen projektiven Punkt von $\mathbb{P}(E)$ liegen im Bild. Man nennt $\infty = \mathbb{P}(s_\infty)$ den unendlichen fernen Punkt der Geraden g. Es gilt:

$$\iota(l) \cup \{\infty\} = \mathbb{P}(E).$$

Man schreibt häufig $l \cup \{\infty\} = \mathbb{P}(E)$.

Es sei $s \neq s_\infty$ ein Sehstrahl durch O also ein Punkt der projektiven Geraden $\mathbb{P}(E)$. Dann trifft s die Gerade l in einem Punkt A. Man erhält so die Umkehrabbildung zu ι:

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{P}(E) \setminus \{s_\infty\} & \rightarrow & l. \\ A & \mapsto & s_A \end{array}$$

Das ist die Perspektive auf die Karte l. wir sind hier in einer zweidimensionalen Welt.

Diese Gleichung liegt der Vorstellung zugrunde, dass eine projektive Gerade durch hinzufügen des eines Punktes ∞ zu einer gewöhnlichen Geraden entsteht.

Als Beispiel betrachten wir die $x - y$-Ebene E mit dem Koordinatenursprung O. Es sei l die Gerade $x = 1$.

Die projektiven Geraden sind Teilmengen der projektiven Ebene $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}$.

Man kann den Punkt O als den Punkt interpretieren, wo sich das Auge eines Malers befindet (*Augpunkt*). Ein Punkt der projektiven Ebene ist dann als Sehstrahl durch den Punkt O zu interpretieren. Wir verwenden den Begriff Sehstrahl, obwohl damit eine Gerade gemeint ist.

Ein Punkt A des Raumes, welcher auf dem Sehstrahl s liegt wird vom Maler auf der Leinwand als der Punkt $A' = s \cap L$ wiedergegeben, d.h. das *Bild* A' von A ist die Spur von $\mathbb{P}(s)$.

Wenn der Sehstrahl s parallel zur Leinwand L verläuft, hat er keine Spur auf der Leinwand. In diesem Fall nennen wir $\mathbb{P}(s)$ einen unendlich fernen projektiven Punkt bezüglich der Leinwand L.

Die Spur einer projektiven Gerade $\mathbb{P}(E)$ auf der Leinwand L ist der Durchschnitt $L \cap E$. Dieser Durchschnitt ist eine Gerade, wenn E nicht parallel zu L ist. Im anderen Fall ist E die eindeutig bestiimmte Ebene durch O, die zu L parallel ist. In diesem Fall nennen wir $P(E)$ die unendliche ferne projektive Gerade bezüglich der Karte L.

Es sei g eine Gerade im Raum, die nicht durch den Augpunkt O geht. Wir wollen annehmen, dass g nicht parallel zur Karte L verläuft. Dann spannen O und g zusammen eine Ebene E auf. Die Spur von E auf der Karte L nennen wir das Bild g' von g. Es gilt also nach Definition $E \cap L = g'$. Nicht jeder Punkt von g' ist das Bild eines Punktes $A \in g$. In Tat, es sei f die Parallele zu g durch den Punkt O. Dann ist f ein Sehstrahl, der in der Ebene E liegt. Er trifft daher die Karte L in einem Punkt F der Geraden g'. Dieser Punkt heißt der *Fluchtpunkt* der Geraden g. Jeder Punkt A von g bestimmt einen projektiven Punkt der projektiven Geraden $\mathbb{P}(E)$. Das ist der projektive Punkt der durch den Sehstrahl OA gegeben ist. Der Punkt $\mathbb{P}(f)$ der projektiven Geraden $\mathbb{P}(E)$ ist verschieden von allen projektiven Punkten $\mathbb{P}(OA)$. Man sagt, dass f der unendlich ferne projektive Punkt von $\mathbb{P}(E)$ bezüglich der Geraden g ist. Man drückt diesen Sachverhalt durch folgende Gleichung aus:

$$\mathbb{P}(E) = g \cup \mathbb{P}(f).$$

Es sei V der Punkt der Geraden g, für den die Verbindungsgerade v von O mit V parallel zur Karte L ist. Dann hat V kein Bild auf L. Der projektive Punkt $\mathbb{P}(v)$ ist ein unendlich ferner Punkt bezüglich der Karte L (siehe Figur ???). Man sagt, dass V der *Verschwindungspunkt* bezüglich der Karte L ist.