Elementare Geometrie Übungen 10

Projektive Abbildungen von Geraden

1) Es seien $g \cup \{\infty\}$ und $g' \cup \{\infty\}$ zwei Geraden Es seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf $g \cup \{\infty\}$. und es seien A', B', C' drei verschiedene Punkte auf $g' \cup \{\infty\}$. Dann gibt es genau eine projektive Transformation $T : g \cup \{\infty\} \to g' \cup \{\infty\}$, so dass $T(A) = A'$, $T(B) = B'$, $T(C) = C'$.

Man konstruiere für einen weiteren Punkt $D \in g \cup \{\infty\}$ den Punkt $T(D)$ auf den beiden gegebenen Arbeitsblättern. (Auf dem zweiten Arbeitsblatt ist der Punkt $C = \infty$!)

2) Es seien $T_1, T_2 : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zwei Möbiustransformationen, die durch die folgenden Formeln gegeben sind:

$$T_1(x) = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}, \quad T_2(x) = \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2},$$

wobei $a_1d_1 \neq c_1b_1$ und $a_2d_2 \neq c_2b_2$.

Man beweise, dass $T_2 \circ T_1$ wieder eine Möbiustransformation ist, für die folgende Formel gilt:

$$T_2 \circ T_1(x) = \frac{px + q}{rx + s},$$

wobei $p = a_2a_1 + b_2c_1$, $q = a_2b_1 + b_2d_1$, $r = c_2a_1 + d_2c_1$, $s = c_2b_1 + d_2d_1$.

3) Mit id bezeichnen wir die Möbiustransformation, so dass $\mathrm{id}(x) = x$. Es sei $T(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ eine Möbiustransformation. Wir definieren die Möbiustransformation

$$U = \frac{dx - b}{-cx + a}$$

Man beweise, dass $U \circ T = \mathrm{id}$ und dass $T \circ U = \mathrm{id}$.

4) Eine Abbildung $f : g \cup \{\infty\} \to g' \cup \{\infty\}$ heisst eine projektive Abbildung, wenn sie das Doppelverhältnis von Punkten erhält. Wir betrachten den Fall, wo $g = g'$.

Wir konstruieren eine Abbildung f wie folgt. Wir wählen eine Gerade h und zwei Punkte P und Q die weder auf g noch auf h liegen. Es sei

$A \in g \cup \{\infty\}$. Wir verbinden P mit A. Es sei S der Schnittpunkt der Geraden PA mit h. Wir verbinden S mit Q. Es sei A' der Schnittpunkt der Geraden QS mit g. Wir definieren $f(A) = A'$.

Wieso ist die Abbildung f projektiv? Konstruieren Sie einen Fixpunkt von f. Finden Sie eine Punkt A, so dass $S = \infty$ und konstruieren Sie A'.

Abgabetermin: Donnerstag, den 14.Januar 2009 um 14:00