

## Elementare Geometrie Übungen 10

### Musterlösung der Aufgabe 4

4) Eine Abbildung  $f : g \cup \{\infty\} \rightarrow g' \cup \{\infty\}$  heisst eine projektive Abbildung, wenn sie das Doppelverhältnis von Punkten erhält. Wir betrachten den Fall, wo  $g = g'$ .

Wir konstruieren eine Abbildung  $f$  wie folgt. Wir wählen eine Gerade  $h$  und zwei Punkte  $P$  und  $Q$  die weder auf  $g$  noch auf  $h$  liegen. Es sei  $A \in g \cup \{\infty\}$ . Wir verbinden  $P$  mit  $A$ . Es sei  $S$  der Schnittpunkt der Geraden  $PA$  mit  $h$ . Wir verbinden  $S$  mit  $Q$ . Es sei  $A'$  der Schnittpunkt der Geraden  $QS$  mit  $g$ . Wir definieren  $f(A) = A'$ .

Wieso ist die Abbildung  $f$  projektiv? Konstruieren Sie einen Fixpunkt von  $f$ . Finden Sie eine Punkt  $A$ , so dass  $S = \infty$  und konstruieren Sie  $A'$ .

**Lösung:** Es sei  $T_1 : g \cup \{\infty\} \rightarrow h \cup \{\infty\}$  die zentrale Projektion mit dem Zentrum  $P$ . Das ist eine projektive Transformation (nach Vorlesung).

Nach Definition ist  $T_1$  eine projektive Transformation, wenn für vier beliebige Punkte  $A, B, C, D$  von  $g \cup \{\infty\}$  folgende Doppelverhältnisse gleich sind:

$$[A, B, C, D] = [T_1(A), T_1(B), T_1(C), T_1(D)].$$

Es sei  $T_2 : h \cup \{\infty\} \rightarrow g \cup \{\infty\}$  die zentrale Projektion mit dem Zentrum  $Q$ . Das ist ebenfalls eine projektive Abbildung. Daher gilt:

$$[T_1(A), T_1(B), T_1(C), T_1(D)] = [T_2(T_1(A)), T_2(T_1(B)), T_2(T_1(C)), T_2(T_1(D))].$$

Die Abbildung  $f : g \cup \{\infty\} \rightarrow g \cup \{\infty\}$  ist die Abbildung  $T_2 \circ T_1$ . Nimmt man die letzten beiden Gleichungen zusammen, so ergibt sich

$$[A, B, C, D] = [f(A), f(B), f(C), f(D)].$$

Also ist  $f$  eine projektive Abbildung.

Es sei  $F \in g \cup \{\infty\}$  ein Fixpunkt von  $f$ . Es sei  $S = PF \cap h$ . Dann muss  $F$  auf der Geraden  $QS$  liegen. Wenn  $S \neq F$ . Dann stimmen die Geraden  $SF$  und  $PQ$  überein. Dann gilt  $F = g \cap PQ$ . Wenn  $S = F$ , so muss  $S$  der Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  sein. Im allgemeinen erhält man also zwei Fixpunkte.