Elementare Geometrie Übungen 3

Harmonische Punkte und Polaren

1) Es seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte auf einer Geraden. Wir sagen, dass die Punkte harmonisch liegen, wenn

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Diese Definition hängt von der Reihenfolge der Punkte A, B, C, D ab.

Wir wollen annehmen, dass die Punkte A, B, C, D harmonisch liegen. Man beweise, dass jeweils die folgenden vier Punkte ebenfalls harmonisch liegen: D, C, A, B und C, D, A, B und B, A, C, D.

Man zeige an einem Beispiel, dass die Punkte A, C, D, B im allgemeinen nicht harmonisch liegen.

2) Es sei ein gleichseitiges Trapez in einen Kreis eingeschrieben. Es sei Q der Schnittpunkt der Diagonalen und P der Schnittpunkt der beiden nichtparallelen Seiten. Die Sehne PQ geht durch den Mittelpunkt des Kreises. Es seien A und B die Schnittpunkte der Sehne mit dem Kreis. Man beweise, dass die Punkte P, Q, A, B harmonisch liegen.

(Hinweis: Man zeige, dass $\angle QVP = 2\rho$. Daraus leite man die Gleichung $\alpha + 2\rho + \tau = 90^o$ ab. Man folgere, dass UA eine Winkelhalbierende des Dreiecks PUQ ist. Schließlich wende man das Lemma des Apollonius an.)

3) In einen Kreis sei ein Viereck eingeschrieben, so dass Schnittpunkte A, B, C wie in der Abbildung entstehen. (A ist der Schnittpunkt der Diagonalen und B und C sind Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten.

Man beweise, dass AB die Polare zu C ist, dass AC die Polare von B ist und dass BC die Polare zu A ist. (Man verwende den Satz vom vollständigen Vierseit.)

In welchem Punkt schneiden sich die Höhen des Dreiecks ABC ?

4) Es sei B ein Punkt ausserhalb eines Kreises K. Benutzen Sie Aufgabe 3, um nur mit dem Lineal die Polare zu B zu konstruieren.

Abgabetermin: Donnerstag, den 5.November 2009 um 14:00