Musterlösung Übungen 3, Aufgabe 3

3) In einen Kreis sei ein Viereck eingeschrieben, so dass Schnittpunkte A, B, C wie in der Abbildung entstehen. (A ist der Schnittpunkt der Diagonalen und B und C sind Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten.

Man beweise, dass AB die Polare zu C ist, dass AC die Polare von B ist und dass BC die Polare zu A ist. (Man verwende den Satz vom vollständigen Vierseit.)

In welchem Punkt schneiden sich die Höhen des Dreiecks ABC ?

Lsg: Wir betrachten in der 1.Abbildung das vollständige Vierseit, welches von der beiden Geraden durch B und den beiden Geraden durch A gebildet wird. Die Diagonalen dieses Vierseits sind in der 2.Abbildung als gestrichelte Linien eingezeichnet. Wir wenden den Satz vom vollständigen Vierseit auf die Diagonale RS an. Die Strecke RS wird von den Schnittpunkten mit den beiden anderen Diagonalen harmonisch geteilt, d.h. die Punkte R, S, C, C' liegen harmonisch. Nach dem Satz von Steiner liegt dann C' auf der Polare c zu C. Genauso sehen wir, dass auch C'' auf der Polare c liegt.

Also ist die Polare c des Punktes C die Gerade AB. Völlig analog ist dann die Polare b des Punktes B die Gerade AC.

Aus der Vorlesungen kennen wir den folgenden Sachverhalt. Es seien P und Q Punkte und es seien p und q ihre Polaren. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

$$Q \in p \;\Leftrightarrow\; P \in q. \tag{1}$$

Es sei a die Polare von A. Dann finden wir nach (1)

$$C \in a \Leftrightarrow \; A \in c.$$

Aber die letzte Aussage ist richtig, da $c = AB$. Also gilt $C \in a$. Aus dem gleichen Grund liegt auch B auf a. Daraus folgt, dass a die Gerade BC ist.

Also sind in dem Dreieck ABC die Polaren der Eckpunkte gerade die gegenüberliegenden Seiten. Wir wissen, dass das Lot eines Punktes P auf seine Polare p bezüglich eines Kreise K durch den Mittelpunkt des Kreises K geht. Deshalb schneiden sich die drei Höhen des Dreiecks ABC im Mittelpunkt des Kreises (3.Abbildung).

Bemerkung: Man kommt auch ohne (1) aus. Da wir schon gezeigt haben, dass A auf der Polare zu c liegt, liegen die Punkte C, A, V, W nach dem

Satz von Steiner harmonisch (4.Abbildung). Aber dann liegt auch C auf der Polare a zu A. Das hatten wir vorher aus (1) geschlossen.