

Musterlösung Übungen 4, Aufg. 3

3) Es sei g die Gerade, die durch die folgende Gleichung beschrieben wird

$$mx + ny + d = 0. \quad (1)$$

Dabei sind $m, n, d \in \mathbb{R}$. Wir setzen voraus, dass $m^2 + n^2 = 1$. Welche Drehung muss man auf g anwenden, damit die gedrehte Gerade parallel zur y -Achse ist? (Gefragt ist die Gleichung der Drehung.)

Man beweise, dass der Absolutbetrag $|d|$ gleich dem Abstand des Nullpunktes von der Geraden g ist.

Die Drehung um den Winkel α kann man wie folgt schreiben. Wenn (x, y) ein Punkt ist, so bezeichnen wir mit (x', y') den Punkt, der durch Drehung um den Winkel α entsteht. Es gilt:

$$\begin{aligned} x' &= \cos \alpha x - \sin \alpha y, & x &= \cos \alpha x' + \sin \alpha y' \\ y' &= \sin \alpha x + \cos \alpha y, & y &= -\sin \alpha x' + \cos \alpha y' \end{aligned}$$

(Man kann das auch so sehen. Die Gleichungen links beschreiben die Drehung um den Winkel α und die Gleichungen rechts die Rückdrehung um den Winkel $-\alpha$.)

Wenn (x, y) ein Punkt der Gerade ist, so erhält man aus der Gleichung (1), dass der Punkt (x', y') der folgenden Gleichung genügt:

$$m(\cos \alpha x' + \sin \alpha y') + n(-\sin \alpha x' + \cos \alpha y') + d = 0 \quad (2)$$

Damit diese Gerade parallel zur y -Achse ist, muss der Koeffizient vor y' gleich 0 sein. Das gilt genau dann, wenn

$$m \sin \alpha + n \cos \alpha = 0.$$

Deshalb sind die Vektoren (m, n) und $(\sin \alpha, \cos \alpha)$ orthogonal.

Also gilt $(n, -m) = (\sin \alpha, \cos \alpha)$ oder $(-n, m) = (\sin \alpha, \cos \alpha)$, denn beide Vektoren haben die Länge 1. Also gibt es zwei mögliche Lösungen:

$$\cos \alpha_1 = m, \sin \alpha_1 = -n \quad \text{oder} \quad \cos \alpha_2 = -m, \sin \alpha_2 = n$$

Man sieht $\alpha_2 = \alpha_1 + 180^\circ$. (Wenn man um 180° dreht erhält man wieder die gleiche Gerade. Daher hat man zwei Lösungen.) Wenn man die erste Lösung in die Gleichung (2) einsetzt, so ergibt sich

$$m(mx' + (-n)y') + n(nx' + my') + d = 0$$

Da $m^2 + n^2 = 1$ ist die Gleichung der gedrehten Gerade

$$x' + d = 0$$

Diese Gerade ist offensichtlich parallel zur y -Achse. Ihr Abstand vom Ursprung ist $|d|$. Da sich dieser Abstand bei einer Drehung der Gerade um den Ursprung nicht ändert, muss auch der Abstand der Geraden g vom Ursprung gleich $|d|$ sein.

Bemerkung: Der Vektor (m, n) ist orthogonal zur Geraden g . Er muss bei der Drehung in den Vektor $(1, 0)$ gehen, denn $(1, 0)$ ist orthogonal zu den Geraden, die parallel zur y -Achse sind. Die folgende Drehung dreht (m, n) in den Vektor $(1, 0)$:

$$\begin{aligned}x' &= mx + ny \\y' &= -nx + my\end{aligned}$$

Daraus sehen wir auch, dass $\cos \alpha = m$ und $\sin \alpha = -n$.