Übungen 7 Aufgabe 1, Musterlösung

1) Es seien zwei Kreise K_1 und K_2 gegeben, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 verschieden seien. Es gibt genau zwei Homothetien die den Kreis K_1 auf den Kreis K_2 abbilden. Wenn die Radien der Kreise verschieden sind, so sind beide Homothetien zentral. Es seien P und Q die Fixpunkte dieser Homothetien. Man beweise, dass die Punkte M_1, M_2, P, Q harmonisch liegen. Insbesondere muss man zeigen, dass diese Punkte auf einer Geraden liegen.

(Abbildung)

Man konstruiere alle gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise.

Lösung: Man zeichnet einen beliebigen Radius der Länge r_1 in den Kreis K_1. Sein Endpunkt sei T_1. Es gibt genau zwei Radien des Kreises K_2 die zu dem gewählten Radius von K_1 parallel sind. Die Endpunkte dieser beiden Radien seien T_2 und S_2.

Eine Homothetie α, die den Kreis K_1 auf den Kreis K_2 abbildet, muss jeden Radius von K_1 auf einen dazu parallelen Radius von K_2 abbilden. Daher muss $\alpha(T_1) = T_2$ oder $\alpha(T_1) = S_2$ gelten. Da $\alpha(M_1) = M_2$, sind die Fixpunkte der beiden Homothetien $P = T_1T_2 \cap M_1M_2$. und $Q = T_1S_2 \cap M_1M_2$.

Bisher haben wir nur Stoff der Vorlesung wiederholt. In der Abbildung ist erklärt, warum die Punkte P, Q, M_1, M_2 harmonisch liegen.

Wir legen von P die Tangente t an den Kreis K_1. Der Berührungspunkt sei B_1. Dann ist M_1B_1 orthogonal zu t. Es sei α die Homothetie mit dem Fixpunkt P, die K_1 auf K_2 abbildet. Da t durch P geht, folgt $\alpha(t) = t$. Der Radius $\overline{M_1B_1}$ wird bei α auf einen Radius $\overline{M_2B_2}$ von K_2 abbgebildet, der parallel zu M_1B_1 ist. Also steht t im Punkt $B_2 = \alpha(B_1)$ senkrecht auf M_2B_2. Dann ist t aber auch eine Tangente an den Kreis K_2.

Die Konstruktion der gemeinsamen Tangente geht also so: Man legt von P aus eine Tangente an K_1. Genauso kann man auch vom Punkt Q aus verfahren.