

## Algebraische Geometrie, Übungen 1

1) Es sei  $X$  eine  $G$ -Topologie. Es sei

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

eine Überdeckung, die wir mit  $\mathcal{U}$  bezeichnen. Wir setzen voraus, dass es ein  $s \in I$  gibt, so dass  $U_s = X$ .

Es sei  $P$  eine abelsche Prägarbe auf  $X$  und  $\check{C}^\cdot$  ihr Čech-Komplex. Man betrachte die Abbildung

$$\varkappa^m : \check{C}^m \rightarrow \check{C}^{m-1}, \quad m \geq 1,$$

die definiert ist durch

$$(\varkappa^m s)_{i_0 \dots i_{m-1}} := s_{\kappa i_0 \dots i_{m-1}}, \quad s \in \check{C}^m.$$

Man beweise die Identität

$$(\partial^{m-1} \circ \varkappa^m + \varkappa^{m+1} \circ \partial^m)(s) = s, \quad m \geq 1.$$

2) Es sei  $A$  ein kommutativer Ring mit 1. Es sei  $f \in A$ . Wir definieren das folgende multiplikativ abgeschlossen System.

$$S(f) = \{s \in A \mid \text{exist. } a \in A, t \in \mathbb{N}, \text{ so dass } as = f^t\}.$$

Es sei  $M$  ein  $A$ -Modul. Man beweise, dass die kanonische Abbildung (Vorlesung)

$$M_f \rightarrow M_{S(f)}$$

ein Isomorphismus von  $A$ -Moduln ist.

Es sei  $g \in A$  ein weiteres Element, so dass  $D(f) \subset D(g)$ . Man beweise, dass  $S(g) \subset S(f)$ . Man folgere, dass  $S(f)$  nur von der Menge  $D(f)$  abhängt und dass die Zuordnung  $D(f) \mapsto M_{S(f)}$  eine Prägarbe ist.

3) Es sei  $A$  ein nullteilerfreier Ring und  $K$  sein Quotientenkörper. Dann gilt  $A_f \subset K$ . Für ein Primideal  $\mathfrak{p} \subset A$  sei  $A_{\mathfrak{p}} \subset K$  die Menge aller Brüche  $(a/s)$  wo  $a, s \in A$  und  $s \notin \mathfrak{p}$ . Man beweise, dass

$$A_f = \bigcap_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_{\mathfrak{p}}.$$