Algebraische Geometrie, Übungen 3

1) Es seien $\mathbb{N}^{opp}$ die natürlichen Zahlen mit die umgekehrten Ordnung $\preccurlyeq$. Es sei R ein kommutativer Ring und es sei $f \in R$. Es sei M ein R-Modul. Man betrachte das folgende induktive System (M_n, ϕ_{ji}):

$$M_n = M, \quad \text{für alle}\, n \in \mathbb{N},$$

und $\phi_{ji} : M_i \to M_j$ ist die Multiplikation mit f^{j-i}.

Man konstruiere einen Isomorphismus

$$\lim_{\to}(M_n, \phi_{ji}) \to M_f$$

2) Es seien stetige Abbildungen topologischer Räume gegeben.

$$X \xrightarrow{\alpha} Z \xleftarrow{\beta} Y$$

Es sei $X \times_Z Y$ ihr Faserprodukt. Es sei W ein topologischer Raum und es seien $W \overset{\sigma}{\to} X$ und $W \overset{\tau}{\to} Y$ zwei stetige Abbildungen, so dass

$$\alpha \circ \sigma = \beta \circ \tau.$$

Man beweise, dass es genau eine stetige Abbildung $W \to X \times_Z Y$, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr] \arrow[drr, "\tau"] \arrow[ddr, "\sigma"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
& X \arrow[r, "\alpha"] & Z
\end{tikzcd}$$

3) Eine offene Einbettung topologischer Räume $i : U \to X$ ist ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von X. Gegeben sei eine zweite offene Einbettung $j : U \to Y$. Konstruieren Sie topologischen Raum Z und stetige Abbildungen $X \overset{\alpha}{\to} Z$ und $Y \overset{\beta}{\to} Z$, so dass α und β offene Einbettungen sind, $Z = \alpha(X) \cup \beta(Y)$, $\alpha \circ i = \beta \circ j$ und folgende Eigenschaft erfüllt ist:

Wenn $\alpha(x) = \beta(y)$ so existiert ein $u \in U$ mit $i(u) = x$ und $j(u) = y$.
Man nennt das die Zusammenklebung längs U.

4) Es sei $\iota : U \to X$ eine offene Einbettung. Es sei F eine Garbe auf U. Man konstruiere eine Garbe E auf X, deren Halme in Punkten $x \in X$, $x \notin U$ leer sind, und so dass es einen Isomorphimus $\iota^\bullet E \cong F$ gibt.

Man beweise, dass für eine Garbe G auf X eine kanonische Bijektion existiert

$$\mathrm{Hom}_X(E, G) \cong \mathrm{Hom}_U(F, \iota^\bullet G).$$