Übungen Algebraische Geometrie 6

1) Es sei X ein topologischer Raum. Es sei $\{F_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Garben auf X. Man beweise, dass die Prägarbe

$$U \mapsto \prod_{i\in I} F_i(U)$$

eine Garbe ist. Diese Garbe $\prod_{i\in I} F_i$ ist welk, wenn alle Garben F_i welk sind. Man folgere, dass es eine Isomorphismus gibt

$$\prod_{i\in I} H^p(X, F_i) \cong H^p(X, \prod_{i\in I} F_i), \quad p \geq 0.$$

2) Es sei F eine Garbe auf X. Man betrachte für $m \geq 1$ die Prägarben

$$U \mapsto H^m(U, F).$$

Man beweise, dass die Garbifizierungen dieser Prägarben gleich 0 sind. (Man verwende Übungen 5,2.)

3) Es sei F ein Garbe auf X. Es sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X. Der garbifizierte Cech-Komplex $\check{\mathcal{C}}^{\cdot}(\mathcal{U}, F)$ definiert einen Morphismus

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, F) \to H^1(X, F). \tag{1}$$

Es sei $\xi \in H^1(X, F)$ eine Kohomologieklasse. Man beweise, dass es eine Überdeckung $\mathcal{U}$ gibt, so dass ξ im Bild der Abbildung (1) ist.

Nach Aufgabe 2 besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung V, so dass das Bild von ξ bei der Abbildung $H^1(X, F) \to H^1(V, F)$ null ist. Also kann man eine Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ finden, so dass die Einschränkung von ξ auf jedes U_i gleich null ist. Wir betrachten den Kern des Differentials ∂ im garbifizierten Cech-Komplex:

$$0 \to \check{\mathcal{Z}}^1(\mathcal{U}, F) \to \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\partial} \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}, F).$$

Man nennt $\check{\mathcal{Z}}^1$ die Garbe der Cech-1-Kozyklen.

Man führe den Beweis mit Hilfe der Kohomologiesequenz der folgenden kurzen exakten Sequenz von Garben:

$$0 \to F \to \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\partial} \check{\mathcal{Z}}^1(\mathcal{U}, F) \to 0.$$