Übungen Algebraische Geometrie 9

1) Es sei X ein Schema. Es sei $s \in \mathcal{O}_X(X)$. Beweisen Sie, dass s genau dann eine Einheit im Ring $\mathcal{O}_X(X)$, wenn für alle $x \in X$ der Keim s_x eine Einheit in dem Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ist. Wenn A ein Ring ist, so bezeichnen wir mit A^* die Gruppe der Einheiten von A. Es bezeichne $U \subset X$ eine offene Menge. Man beweise, dass die Prägarbe abelscher Gruppen

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)^*$$

eine Garbe ist. Sie heißt $\mathcal{O}_X^*$.

2) Es sei K ein Körper. Es sei $\mathbb{P}^1_K = U_0 \cup U_1$ die Überdeckung aus der Vorlesung. Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{U}$. Man beweise, dass

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*_{\mathcal{P}^1_K}) \cong \mathbb{Z},$$

wobei links Cech-Kohomologie steht.

3) Es sei R ein Ring und $R[T_0, T_1]$ der Polynomring. Man betrachte die R-Algebrahomomorphismen:

$$\begin{array}{ccccccc} R[X] & \to & R[T_0,T_1]_{T_0}, & \qquad & R[Y] & \to & R[T_0,T_1]_{T_1}. \\ X & \mapsto & (T_1/T_0) & & Y & \mapsto & (T_0/T_1) \end{array} \tag{1}$$

Es sei $C = D(T_0) \cup D(T_1) \subset \operatorname{Spec} R[T_0, T_1]$. Dann definieren die Homomorphismen (1) einen Morphismus von Schemata

$$\pi : C \to \mathbb{P}^1_R.$$

Man zeige, dass es einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}$-Moduln gibt:

$$\pi_* \mathcal{O}_C \cong \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(m).$$

Hinweis: Im Sinne des ersten Homomorphismus von (1) kann man schreiben: $R[T_0, T_1]_{T_0} = R[X, T_0, T_0^{-1}]$.

4) Es sei $X = \operatorname{Spec} A$. Es sei $f : X \to \mathbb{P}^1_R$ ein Morphismus von Schemata. Man beweise, dass die offenen Unterschema $f^{-1}(U_0)$, $f^{-1}(U_1)$ von X affin sind. (Hinweis: Beweisen Sie, dass $f^{-1}(U_0) \to X$ ein affiner Morphismus ist.)