Algebraische Geometrie II, Übung 2

1) Es sei X ein Schema und $U \subset X$ eine offenen Menge. Es sei R ein lokaler Ring und $s \in \operatorname{Spec} R$, der Punkt, welcher dem maximalen Ideal von R entspricht. Es sei

$$\alpha : \operatorname{Spec} R \to X$$

ein Morphismus, so dass $\alpha(s) \in U$. Man beweise, dass α über U faktorisiert.

2) Es sei S ein lokaler Ring. Es seien $a_1, a_2 : S \to T$ zwei Ringhomomorphismen. Es sei

$$R = \{s \in S \mid a_1(s) = a_2(s)\}.$$

Es seien $n < m$ eine natürliche Zahlen. Es sei $Q \subset S^m$ ein direkter Summand vom Rang n als S-Modul, so dass die T-Untermoduln, die von $a_1(Q)$ bzw. $a_2(Q)$, in T^m erzeugt werden, gleich sind. (a_i bezeichnen hier die induzierten Abbildungen $a_i : S^m \to T^m$.)

Es sei

$$P = \{x \in Q \mid a_1(x) = a_2(x)\}.$$

Man beweise, dass $P \subset R^m$ ein direkter Summand vom Rang n als R-Modul ist und dass P den S-Modul Q erzeugt.

(Man kann die Existenz der Schema $G^{n,r}$ benutzen und die Aufgabe 1.)

3) Ein mengenwertiger Funktor auf der Kategorie der Ringe ist ein Schema, wenn er eine Garbe ist und eine Überdeckung durch offene Subfunktoren besitzt. Es sei A ein Ring. Ein A-Schema ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $\pi : X \to \operatorname{Spec} A$. Wenn $\rho : Y \to \operatorname{Spec} A$ ein weiteres A-Schema ist, so bezeichnet man mit $Hom_A(X, Y)$ die Menge aller Morphismen $X \to Y$ die mit ρ und π verträglich sind:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
& \operatorname{Spec} A &
\end{tikzcd}$$

Es sei R eine A-Algebra. Dann ist $\operatorname{Spec} R$ ein A-Schema. Für ein A-Schema X hat man den Funktor $\check{X} : (A - \text{Algebren}) \to (\text{Mengen})$, $\check{X}(R) = \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Spec} R, X)$.

Man gebe ein Kriterium, wann ein Funktor

$$F : (A - \text{Algebren}) \to (\text{Mengen}).$$

isomorph zu $\check{X}$ für ein A-Schema X ist. Zum Beweis kann man folgenden Funktor $\tilde{F}$: (Ringe) $\to$ (Mengen) verwenden: Es sei R ein Ring. Ein Ringhomomorphismus $\phi : A \to R$ definiert eine A-Algebrastruktur auf R, die wir mit $R_{[\phi]}$ bezeichnen. Dann ist

$$\tilde{F}(R) = \{(\phi, \xi) \mid \text{wo } \phi : A \to R,\ \xi \in F(R_{[\phi]})\}.$$

4) Es sei A ein Ring. Es sei E ein lokal freier A-Modul vom Rang $n + r$. Wir definieren folgenden Funktor auf der Kategorie der A-Algebren:

$$G(R) = \{P \subset E \otimes_A R \mid \text{so dass } P \text{ ein direkter Summand vom Rang } n\}.$$

(Man führe dies mit Aufgabe 3 auf den Fall zurück, wo E ein freier Modul ist.)