Algebraische Geometrie II, Übung 6

1) Es sei $j : U \to X$ ein offenes Unterschema eines Schemas X. Zeigen Sie, dass das inverse Bild $j^*\mathcal{F}$ eines injektives $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{F}$ ein injektiver $\mathcal{O}_U$-Modul ist.

Benutzen Sie den Funktor $j_!$.

2) Es sei A ein Ring. Wir betrachten $f : \mathbb{P}^d_A \to \operatorname{Spec} A$. Es sei $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe auf $\mathbb{P}^d_A$. Man beweise, dass es eine Familie $\{m_\lambda\}_{\lambda \in I}$ von ganzen Zahlen m_λ gibt und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}$-Modulhomomorphismen $\alpha_\lambda : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(m_\lambda) \to \mathcal{F}$, so dass

$$\bigoplus_{\lambda \in I} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(m_\lambda) \to F$$

surjektiv ist.

Hinweis: Es sei U_i eine offene Menge der Standardüberdeckung von $\mathbb{P}^d_A$. Dann findet man Schnitte $s_\lambda \in \mathcal{F}(U_i)$, die den $\mathcal{O}_{U_i}$-Modul $\mathcal{F}_{|U_i}$ erzeugen. Man beweist, dass man $m_\lambda \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass man s_λ zu einem globalen Schnitt von $\mathcal{F}(-m_\lambda)$ fortsetsen kann.

3) Es sei $\mathcal{F}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul auf einem Schema X, der lokal endlich erzeugt ist. Es sei G ein lokal endlich erzeugter $\mathcal{O}_X$-Modul und $\alpha : G \to F$ ein surjektiver Homomorphismus. Man zeige, dass der Kern von α lokal endlich erzeugt ist. Es sei $f : X = \mathbb{P}^d_A \to \operatorname{Spec} A$ der projektive Raum über einem beliebigen Ring.

Man beweise, dass es eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln gibt

$$\ldots \to \mathcal{L}_i \to \ldots \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0.$$

so dass jedes $\mathcal{L}_i$ eine endliche direkte Summe von Garben der Form $\mathcal{O}_X(m)$, mit $m < 0$ ist. Es sei $K_i = H^d(X, \mathcal{L}_i)$. Man beweise, dass man einen Komplex freier endlich erzeugter A-Moduln erhält:

$$\ldots \to K_i \to \ldots \to K_1 \to K_0 \to 0 \ldots$$

Wir bezeichnen mit $H_i(K.)$ die Homologie an der Stelle K_i. Man beweise, dass

$$H_i(K.) = H^{d-i}(X, \mathcal{F}).$$

Es sei M ein A-Modul und $\mathcal{M} = \tilde{M}$. Man beweise, dass

$$H_i(K. \otimes_A M) = H^{d-i}(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{M}).$$