Algebraische Geometrie III, Übung 5

1) Es sei k ein unendlicher Körper. Es seien $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{P}^N_k$ nicht notwendig abgeschlossene Punkte. Man beweise, dass es Elemente $a_0, \ldots, a_N \in K$ gibt, die nicht alle 0 sind, so dass

$$x_i \in D_+(a_0T_0 + \ldots + a_NT_N), \quad \text{für, } i = 1, \ldots, r.$$

Es sei X eine reguläre Fläche v.e.T. über k. Es sei $\phi : X \subset \mathbb{P}^N_k$ eine abgeschlossene Einbettung und es sei $\mathcal{L} = \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_k}(1)$. Es sei $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X(D)$, wobei D eine irreduzible Kurve auf X ist. Man zeige, für das Schnittprodukt

$$(\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}) > 0.$$

2) Es seien X, Y irreduzible reguläre Flächen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Wenn D_1 und D_2 zwei Weildivisoren auf X sind, die keine gemeinsamen Komponenten haben, so definieren wir

$$(D_1 \cdot D_2) = \sum_{P \in D_1 \cap D_2} (D_1 \cdot D_2)_P.$$

Es sei $\alpha : X \to Y$ ein endlicher Morphismus. Es sei $d = [\kappa(X) : \kappa(Y)]$.

Man beweise:

$$(\alpha^*D_1 \cdot \alpha^*D_2) = d(D_1 \cdot D_2).$$

3) Es gilt der Vermeidungssatz: R ein Ring. Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ seien Primideale. Es sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal. Dann gilt $\mathfrak{b} \subset \cup_i \mathfrak{p}_i$, gdw. $\mathfrak{b} \in \mathfrak{p}_j$ für ein j.

Man beweise: Es sei $U \subset \operatorname{Spec} R$ eine offene Menge, so dass $\mathfrak{p}_i \in U$ für $i = 1, \ldots, r$. Man beweise, dass es eine offene affine Menge $V \subset U$ gibt, so dass $\mathfrak{p}_i \in V$ für $i = 1, \ldots, r$.

4) Es sei $X = \operatorname{Spec} A$ ein Schema v.e.T. über einem Köper k. Es sei $\mathcal{L}$ ein Linienbündel auf X. Es seien $x_1, \ldots, x_r$ abgeschlossene Punkte von X. Man beweise, dass es eine offene affine Menge $U \subset X$ gibt, so dass $\mathcal{L}_{|U}$ isomorph zu $\mathcal{O}_U$ ist, und so dass $x_1, \ldots, x_r \in U$. Man befreie sich von der Annahme, dass die Punkte abgeschlossen sind.

(Hinweis: Es sei $L^\sim = \mathcal{L}$ und es seien $\mathfrak{m}_1, \ldots \mathfrak{m}_r$ die maximalen Ideale, die den Punkten x_i entsprechen. Man betrachte die Abbildungen $L \to L/\mathfrak{m}_i L$.)

Es sei $X \subset \mathbb{P}^N_k$ ein abgeschlossenes Unterschema, das irreduzibel und reduziert ist. Es seien D und E effektive Cartierdivisoren von X. Man beweise, dass es einen Cartierdivisor E' gibt (nicht notwendig effektiv), der zu E linear äquivalent ist, sd. kein Punkt $\eta \in X$ der Kodimension 1 existiert, der im Durchschnitt $\operatorname{Supp} D \cap \operatorname{Supp} E'$ liegt. (Kodimension 1 heißt, dass der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\eta}$ die Krulldimension 1 hat.)