Algebraische Geometrie III, Übung 6

1) Es sei X eine projektives, glattes, irreduzibles Schema der Dimension 2 über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Es sei D ein Divisor auf X, so dass $(D^2) > 0$. Es sei E ein Divisor, so dass

$$(D^2)(E^2) = (D \cdot E)^2.$$

Man beweise, dass es ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $b \neq 0$ und $aD + bE$ numerisch äquivalent zu 0 ist.

2) Es seien C_1 und C_2 projektive, glatte, irreduzible Schema der Dimension 1 über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k Es seien $x_1 \in C_1$ und $x_2 \in C_2$ abgeschlossene Punkte. Es sei $X = C_1 \times_{\operatorname{Spec} k} C_2$. Das ist eine glatte projektive Fläche über k. Wir betrachten die Divisoren $F_1 = \{x_1\} \times C_2$ und $F_2 = C_1 \times \{x_2\}$.

Man beweise, dass für jeden Divisor D auf X folgende Ungleichung gilt:

$$(D^2) \leq 2(F_1 \cdot D)(F_2 \cdot D)$$

(Hinweis: Was ist die Sylvester-Normalform von $\mathbb{Q}D + \mathbb{Q}F_1 + \mathbb{Q}F_2$ mit dem Schnittprodukt?)

3) Es sei k ein Körper. Es sei $Y \subset \mathbb{P}^N_k$ ein lokal vollständiger Durchschnitt der Dimension e. Folgern Sie aus Proposition 7 (Zusammenfassung 15/16), dass es eine invertierbare Garbe ω_Y auf Y gibt, so dass für jeden quasikohärenten $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{F}$ auf Y ein Isomorphismus existiert:

$$\operatorname{Hom}_k(H^i(X, \mathcal{F}), k) \cong \operatorname{Ext}^{e-i}(\mathcal{F}, \omega_Y).$$

(Mit Hilfe von EGA III Chapt 0, 13.2.3 kann man sehen, dass der letzte Isomorphismus richtig ist, wenn man ihn für kohärente $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\mathcal{F}$ weiß.)

4) Es sei $X \overset{\iota}{\subset} Y \subset \mathbb{P}^N_k$, wobei Y wie in Aufgabe 3 und wo X ein vollständiger Durchschnitt der Dimension d ist. Dann gilt (Zusammenfassung 15/16) $\omega_X[d] = R\breve{\iota}\omega_Y[e]$. Man beweise die Adjunktionsformel

$$\omega_X = \mathcal{E}xt^{e-d}_{\mathcal{O}_Y}(\iota_* \mathcal{O}_X, \omega_Y).$$