

Musterlsg. Aufg.4, Übungen 7

4) Es sei ein Dreieck gegeben, das zwei gleichlange Höhen hat. Man beweise, dass das Dreieck gleichschenkelig ist.

Lösung: Das Dreieck sei ABC . Es sei h_A die Höhe von Punkt A aus und es sei E ihr Fußpunkt auf der Geraden BC . Es sei h_B die Höhe von Punkt B aus und es sei F ihr Fußpunkt auf der Geraden AC . Wir nehmen an, dass die Strecken h_A und h_B die gleich Länge haben.

Die Dreiecke AEB und BFA haben einen rechten Winkel in E bzw. F und je zwei Paare gleichlanger Seiten. Sie sind daher kongruent.

Man findet eine Isometrie σ , so dass $\sigma(A) = B$, $\sigma(E) = F$ und $\sigma(B) = A$. Dann ist σ^2 eine Bewegung mit zwei Fixpunkten A und B . Daher gilt, dass $\sigma^2 = \text{id}$.

Man sieht, dass σ die Gerade $BE = BC$ auf die Gerade $AF = AC$ abbildet. Da $\sigma^2 = \text{id}$ bildet σ die Gerade AC auch auf die Gerade BC ab. Daher ist der Schnittpunkt $C = AC \cap BC$ ein Fixpunkt von σ . Also ist σ eine Symmetrie des Dreiecks ABC . Es folgt:

$$|AC| = |\sigma(A)\sigma(C)| = |AB|$$