Es sei $ABCDE$ ein Fünfeck. Das ist ein Streckenzug aus fünf Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$. Zwei aufeinanderfolgende Strecken haben jeweils einen Eckpunkt gemeinsam, aber abgesehen davon soll es keine weiteren Überschneidungen zwischen den Strecken geben.

Wir setzen $\tau_A = \overrightarrow{AB}$, $\tau_B = \overrightarrow{BC}$, $\tau_C = \overrightarrow{CD}$, $\tau_D = \overrightarrow{DE}$ und $\tau_E = \overrightarrow{EA}$. Das sind die Translationen, die jeweils einen Eckpunkt in den nächsten schieben. Es sei s_A der Strahl mit dem Anfang A, der zu dem nächsten Eckpunkt B weist. Entsprechend seien s_B, s_C, s_D, s_E definiert. Dann beginnt s_E in E und weist nach A.

Der Strahl $\tau_A(s_A) = t_B$ beginnt in B und weist in die entgegengesetzte Richtung zu A. Den Winkel $\beta = \sphericalangle(t_B, s_B)$ nennt man den Außenwinkel des Fünfecks im Punkt B. Entsprechend definiert man die Strahlen t_C, t_D, t_E, t_A und die Außenwinkel γ in C, δ in D, ϵ in E und α in A.

Satz 1 *Die Summe der Außenwinkel in einem Vieleck ist* 0.

Beweis: Wir betrachten den Fall eines 5-Ecks. Dann müssen wir zeigen, dass

$$\gamma + \delta + \epsilon + \alpha + \beta = 0 \tag{1}$$

In der Tat, es sei ρ_B die Drehung um B um den Drehwinkel β. Dann gilt $\rho_B(t_B) = s_B$. Entsprechend seien die Drehungen ρ_C, ρ_D, ρ_E, ρ_A definiert. Man betrachtet die Bewegung:

$$\tau_A \circ \rho_A \circ \tau_E \circ \rho_E \circ \tau_D \circ \rho_D \circ \tau_C \circ \rho_C \circ \tau_B \circ \rho_B \tag{2}$$

Es ist klar, dass das Kompositum dieser Abbildungen den Strahl t_B auf den Strahl t_B abbildet. Daher ist die Bewegung (2) die Identität. Ihr Drehwinkel ist also 0. Andererseits ist der Drehwinkel eines Kompositums von Bewegungen gleich der Summen der Drehwinkel der einzelnen Bewegungen. Daraus ergibt sich die Gleichung (1) *Q.E.D.*