Elementare Geometrie
Vorlesung 1

Thomas Zink

19.4.2017

Mengen und Abbildungen

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten Objekten unseres Denkens. (Objekte = Elemente)
$P \in$ Menge bedeutet: Das Element P gehört zur Menge.
Wir sagen: P ist ein Element der Menge.
$\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen.

$$1 \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

$\frac{1}{2}$ ist kein Element von $\mathbb{N}$.

Der Raum

Den Raum $\mathbb{A}$ denken wir uns als eine Menge von Punkten.
Es seien M uns N Mengen. M heißt Teilmenge von N, wenn

$$P \in M \Rightarrow P \in N$$

Wir schreiben $M \subset N$.
Eine Ebene E oder eine Gerade g ist eine Teilmenge von $\mathbb{A}$.
Die Gerade g liegt auf E, gdw. $g \subset E$.
Es seien M und N Mengen. $M \cap N$ ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu M als auch zu N gehören.

Abbildungen

Es seien M und N Mengen. Eine Abbildung $f : M \to N$ ist eine Vorschrift f, die jedem Element $P \in M$ ein Element $f(P) \in N$ zuordnet.
Es sei $F \subset M$. Das Bild $f(F)$ ist die Menge aller Elemente $f(P)$, wobei $P \in F$ ein beliebiges Element sein kann.

$$f(F) = \{f(P) \mid P \in F\} \subset N.$$

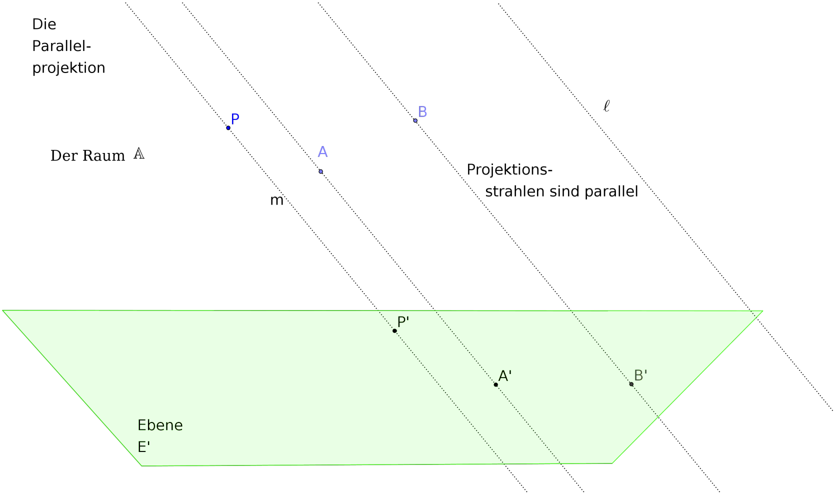
Parallelprojektion

Es sei $E' \subset \mathbb{A}$ eine Ebene und es sei $\ell \subset \mathbb{A}$ eine Gerade, die nicht parallel zu E' ist. Wir definieren die Parallelprojektion $\pi : \mathbb{A} \to E'$ längs ℓ.
Es sei $P \in \mathbb{A}$. Es sei m die Parallele zu ℓ durch P

$$\pi(P) = m \cap E' \in E'. \tag{1}$$

siehe Abbildung: Parallelprojektion. Abkürzung $P' = \pi(P)$.

Die
Parallel-
projektion



Eigenschaften der Parallelprojektion

Es sei m parallel zu ℓ. Dann ist $\pi(m) = m \cap E'$ ein Punkt.
Die Gerade $g \subset \mathbb{A}$ sei nicht parallel zu ℓ. Dann ist $\pi(g)$ eine Gerade.
Die Gerade h sei parallel zu g (s.o.). Dann sind $\pi(h)$ und $\pi(g)$ parallele Geraden.
Es seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte auf g. Dann gilt für die Abstände:

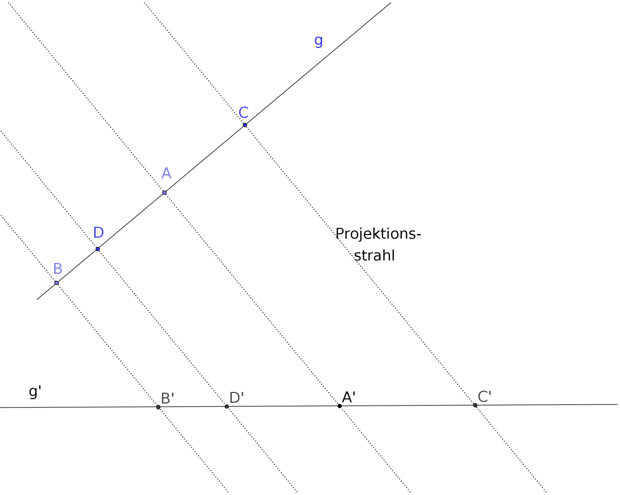
$$|AB| : |CD| = |\pi(A)\pi(B)| : |\pi(C)\pi(D)|.$$

Im folgenden Bild ist $A' = \pi(A)$ usw.

Die
Parallel-
projektion
der Gerade
g auf g'.

Teilverh''altnisse
bleiben erhalten.

|AB| : |CD| = |A'B'| : |C'D'|



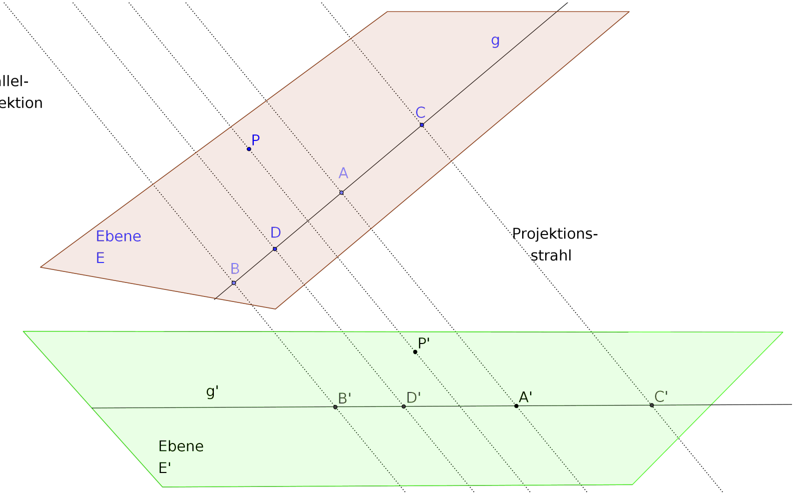
Parallelprojektion einer Ebene auf eine andere

Mit den Bezeichnungen von (1) sei E eine Ebene, die nicht parallel zu ℓ ist. Dann definieren wir $p : E \to E'$

$$p(P) := \pi(P), \quad P \in E.$$

Das ist π, aber wir vergessen, was π für Punkte tut, die nicht in E liegen (siehe Abbildung Parallelprojektion 3).
Man sagt p ist die Einschränkung von π auf die Teilmenge $E \subset \mathbb{A}$.

Die
Parallel-
projektion



injektiv und surjektiv

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt injektiv, wenn für alle $P, Q \in M$ gilt:

$$f(P) = f(Q) \;\Rightarrow\; P = Q.$$

Man nennt f surjektiv, wenn $f(M) = N$. Man nennt f bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.
$\pi : \mathbb{A} \to E'$ ist nicht injektiv, aber $p : E \to E'$ ist injektiv. Sowohl π als auch p sind surjektiv.

Strahlen

Es sei g eine Gerade. Es sei $P \in g$. Es gibt zwei Strahlen s und t von P aus

$$g = s \cup t, \quad s \cap t = \{P\}$$

Wenn $A, B \in s$ (resp. $A, B \in t$), so liegt die Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ in s. Es seien $A, B \in \mathbb{A}$ verschiedene Punkte.
$\overset{\mapsto}{AB}$ ist der Strahl mit dem Anfang A, der B enthält.
Bemerkung: Es seien M und N Mengen. Dann ist $M \cup N$ die Menge aller Elemente, die in M oder in N liegen.
(Dazu gehören auch die Elemente, die in M und N liegen)

Translationen, Vektoren

Es sei g eine Gerade. Eine bijektive Abildung $T : g \to g$ heißt Translation, wenn für zwei beliebige Punkte $A, B \in g$

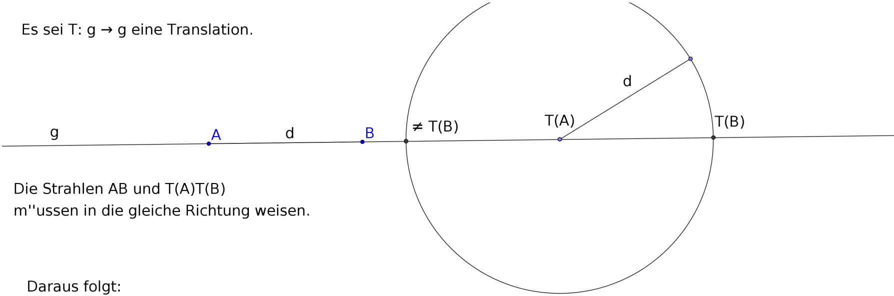
$$|T(A)T(B)| = |AB|,$$

und wenn für jeden Strahl $s \subset g$ die Menge $T(s)$ ein Strahl ist, der in die gleiche Richtung weist wie s.
Man folgert, dass dann auch

$$|AT(A)| = |BT(B)|.$$

Anstelle von Translation sagt man auch Vektor.

Es sei T: g → g eine Translation.



Die Strahlen AB und T(A)T(B)
m''ussen in die gleiche Richtung weisen.

Daraus folgt:
$|A\,T(A)| = |B\,T(A)| + d = |B\,T(A)| + |T(A)\,T(B)| = |B\,T(B)|.$

Kompositum von Abbildungen

Es seien $g : L \to M$ und $f : M \to N$ Abbildungen
Man definiert das Kompositum $f \circ g : L \to N$:

$$(f \circ g)(Q) = f(g(Q)).$$

Es sei $g(Q) = P$ und $f(P) = O$. Anschaulicher schreibt man:

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{g} & M & \xrightarrow{f} & N \\ Q & \mapsto & P & \mapsto & O \end{array}$$

$O = (f \circ g)(Q).$

Die identische Abbildung

Wir bezeichnen mit $\mathrm{id}_M : M \to M$ die Abbildung

$$\mathrm{id}_M(P) = P, \quad \text{für alle } P \in M.$$

Wenn $f : M \to N$ eine Abbildung ist, so gilt

$$f \circ \mathrm{id}_M = f, \quad \mathrm{id}_N \circ f = f.$$

Die Umkehrabbildung

Es sei $f : M \to N$ bijektiv. Dann existiert eine Abbildung $g : N \to M$, so dass

$$f(P) = Q \text{ gdw. } g(Q) = P, \quad P \in M,\ Q \in N.$$

Es gilt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_M, \quad f \circ g = \mathrm{id}_N\,.$$

Wir benutzen die Bezeichnung $f^{-1} := g$.

Translationen

Wenn $T : g \to g$ eine Translation ist, so auch T^{-1}.

Proposition

Es seien $S, T : g \to g$ zwei Translationen. Dann ist $T \circ S$ wieder eine Translation.

In der Tat, es seien $A, B \in g$. Dann gilt

$$|(T{\circ}S)(A)\ (T{\circ}S)(B)| = |T(S(A))\ T(S(B))| = |S(A)\ S(B)| = |AB|.$$

Wenn s ein Strahl ist, so ist $S(s)$ ein Strahl, der in die gleiche Richtung zeigt und dann auch $T(S(s))$.

Translation als Kompositum von Parallelprojektionen

Es sei g eine Gerade. Wir wählen eine Parallele h und zwei Projektionsrichtungen ℓ und m, die nicht parallel zu g sind.

Es sei $q : g \to h$ die Parallelprojektion längs ℓ
Es sei $p : h \to g$ die Parallelprojektion längs m
Dann ist $T := p \circ q : g \to g$ eine Translation.

Konstruktion von Translationen T: g → g.

Man w''ahlt eine Gerade h, die parallel
zu g ist und zwei Projektionsrichtungen: ℓ und m.