Elementare Geometrie Vorlesung 13

Thomas Zink

7.6.2017

1.Vektoren

Es sei E eine Ebene. Eine Translation $T : E \to E$ wird auch als Vektor bezeichnet. Wenn $O, A \in E$, so gibt es genau einen Vektor T, so dass $T(O) = A$. Wir schreiben:

$$T = \vec{OA}.$$

Es sei E eine Ebene. Eine Translation $T : E \to E$ wird auch als Vektor bezeichnet. Wenn $O, A \in E$, so gibt es genau einen Vektor T, so dass $T(O) = A$. Wir schreiben:

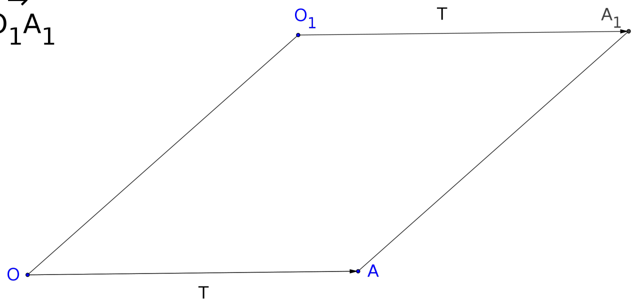
$$T = \vec{OA}.$$

Es seien $O_1, A_1 \in E$, die nicht beide auf der Geraden OA liegen. Dann gilt

$$\vec{OA} = \vec{O_1A_1} \quad \Leftrightarrow \quad OAA_1O_1 \text{ ist ein Parallelelogramm}$$

2. Gleichheit von Vektoren

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O_1A_1}$$



3.Streckung von Vektoren

Es seien $O, A \in E$ verschiedene Punkte. Es sei $\lambda \geq 0$ eine reelle Zahl. Dann gibt es genau einen Punkt B auf dem Strahl $\overrightarrow{OA}$, so dass

$$|OB| = \lambda |OA|.$$

3.Streckung von Vektoren

Es seien $O, A \in E$ verschiedene Punkte. Es sei $\lambda \geq 0$ eine reelle Zahl. Dann gibt es genau einen Punkt B auf dem Strahl $\overset{\longmapsto}{OA}$, so dass

$$|OB| = \lambda |OA|.$$

Definition

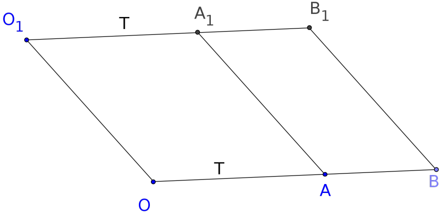
Wir definieren die Streckung des Vektors $T = \vec{OA}$ mit dem Faktor $\lambda \geq 0$:

$$\lambda \vec{OA} = \vec{OB}$$

4.Streckung von Vektoren

Es sei T ein Vektor und $\lambda > 0$.
Es sei T(O) = A und (\lambda T)(O) = B.

Wir betrachten ein Parallelogramm.
Es gilt: $T(O_1) = A_1$ und $(\lambda\, T)(O_1) = B_1$.



$$|OB| = \lambda\, |OA| \;\Rightarrow\; |O_1B_1| = \lambda |O_1A_1|$$

5.Streckung von Vektoren

Die Streckung $\lambda\overrightarrow{OA}$ hängt nur von dem Vektor $T = \overrightarrow{OA}$ ab und nicht von der Wahl der Punkte O und A. Wir schreiben λT für die Streckung.

$$(\lambda T)(O) = B.$$

5.Streckung von Vektoren

Die Streckung $\lambda\vec{OA}$ hängt nur von dem Vektor $T = \vec{OA}$ ab und nicht von der Wahl der Punkte O und A. Wir schreiben λT für die Streckung.

$$(\lambda T)(O) = B.$$

Beispiel:

$$2T = T \circ T, \quad 3T = T \circ T \circ T.$$

6.Streckung mit negativem Faktor

Es gibt einen Punkt $B_1 \in OA$, der auf der anderen Seite von O liegt wir A und so dass $|OB_1| = \lambda |OA|$. Wir setzen:

$$(-\lambda)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB_1}$$

Das ist die Streckung mit einem negativen Faktor.

6.Streckung mit negativem Faktor

Es gibt einen Punkt $B_1 \in OA$, der auf der anderen Seite von O liegt wir A und so dass $|OB_1| = \lambda|OA|$. Wir setzen:

$$(-\lambda)\vec{OA} = \vec{OB_1}$$

Das ist die Streckung mit einem negativen Faktor.

Die beiden Abbildungen $S = \vec{OB} = \lambda T$ und $S_1 = \vec{OB_1} = (-\lambda)T$ sind invers zueinander:

$$(\lambda T) \circ ((-\lambda)T) = \mathrm{id}_E \,.$$

7. Parallele Vektoren

Zwei Vektoren $S, T : E \to E$ heißen parallel, wenn für alle $O \in E$, die Punkte

$$O, T(O), S(O)$$

auf eine Geraden liegen.

7. Parallele Vektoren

Zwei Vektoren $S, T : E \to E$ heißen parallel, wenn für alle $O \in E$, die Punkte

$$O, T(O), S(O)$$

auf eine Geraden liegen.

Proposition

Es sei $T \neq \mathrm{id}_E$. Ein Vektor S ist genau dann parallel zu T, wenn eine reelle Zahl λ existiert, so dass

$$S = \lambda T.$$

Parallele Vektoren nennt man auch linear abhängig.

8.Streckung und Teilverhältnis

Die Streckung und dass Teilverhältnis hängen wie folgt zusammen. Wenn O, A, B drei verschiedene Punkte sind, so hat man

$$\vec{OB} = \lambda \vec{OA} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{OB}{OA}.$$

Es seien A, B, C, D Punkte, so dass $A \neq B$ und $C \neq D$. Wenn die Geraden AB und CD parallel sind, so gilt:

$$\vec{AB} = \lambda \vec{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{AB}{CD}.$$

9.Summe von Vektoren

Es seien $S, T : E \to E$ zwei Translationen der Ebene. Dann definieren

$$S + T = S \circ T = T \circ S.$$

Das nennen wir die Summe von zwei Vektoren, d.h. Summe ist hier das gleiche wie Kompositum von Abbildungen. Dann gilt $2T = T + T$ und $(-1)T = T^{-1}$

9.Summe von Vektoren

Es seien $S, T : E \to E$ zwei Translationen der Ebene. Dann definieren

$$S + T = S \circ T = T \circ S.$$

Das nennen wir die Summe von zwei Vektoren, d.h. Summe ist hier das gleiche wie Kompositum von Abbildungen. Dann gilt $2T = T + T$ und $(-1)T = T^{-1}$

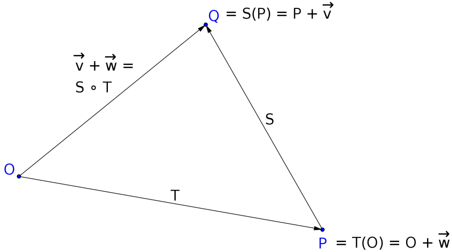
Wenn wir die additive Schreibweise $S + T$ verwenden, bezeichnen wir Vektoren wie folgt

$$S = \vec{v}, \quad T = \vec{w}.$$

Wir schreiben für $P \in E$: $S(P) = P + \vec{v}$

10.Die neue Schreibweise

$S = \vec{v}, \quad T = \vec{w}$



$Q = S(T(O)) = (O + \vec{w}) + \vec{v}$

11.Die neue Schreibweise

Die identische Abbildung $\mathrm{id}_E : E \to E$ nennen wir den Nullvektor:

$$\vec{0} = \mathrm{id}_E\ .$$

Wenn $S = \vec{v} : E \to E$ ein Vektor ist, so gilt $S^{-1} = (-1)\vec{v}$. Das nennen wir das Negative des Vektors $\vec{v}$.

11.Die neue Schreibweise

Die identische Abbildung $\mathrm{id}_E : E \to E$ nennen wir den Nullvektor:

$$\vec{0} = \mathrm{id}_E \, .$$

Wenn $S = \vec{v} : E \to E$ ein Vektor ist, so gilt $S^{-1} = (-1)\vec{v}$. Das nennen wir das Negative des Vektors $\vec{v}$.

Für drei Punkte A, B, C gilt:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.$$

12.Strahlensatz und Distributivgesetz

Proposition

Es sei λ eine reelle Zahl. Es seien $\vec{v}, \vec{w}$ zwei Vektoren. Dann gilt

$$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}.$$

13.Distributivgesetz = Strahlensatz

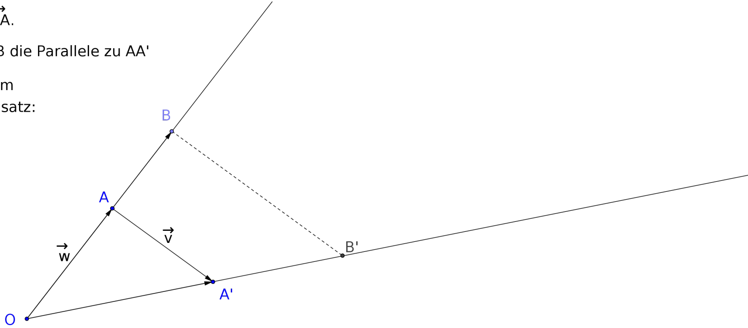
Es sei $\vec{OB} = \lambda\ \vec{OA}$.

Wir legen durch B die Parallele zu AA'

Dann gilt nach dem
1. und 2. Strahlensatz:

$\vec{OB'} = \lambda\ \vec{OA'}$

$\vec{BB'} = \lambda\ \vec{AA'}$



$\lambda\vec{v} + \lambda\vec{w} = \lambda\ \vec{AA'} + \lambda\ \vec{OA} =$

$\vec{BB'} + \vec{OB} = \vec{OB'} = \lambda\vec{OA'} = \lambda(\vec{v} + \vec{w})$.

14.Rechenregeln der Vektorrechnung

$$\begin{aligned}
\vec{v} + \vec{w} &= \vec{w} + \vec{v} \\
(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \\
\vec{v} + \vec{0} &= \vec{v} \\
0 \cdot \vec{v} &= \vec{0} \\
\lambda \vec{0} &= \vec{0} \\
(\lambda + \mu)\vec{v} &= \lambda\vec{v} + \mu\vec{v} \\
\lambda(\vec{v} + \vec{w}) &= \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}
\end{aligned}$$

Wenn $P \in E$ ein Punkt ist, so gilt

$$(P + \vec{v}) + \vec{w} = P + (\vec{v} + \vec{w})$$

15. Teilverhältnis als Gleichgewicht

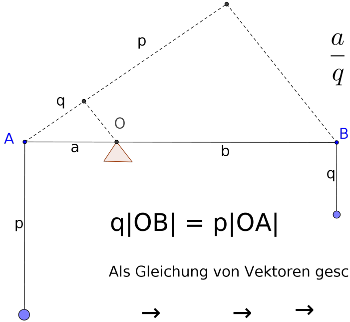
Es seien $A \neq B$ zwei Punkte. Es seien $p, q \geq 0$ reelle Zahlen, die nicht beide gleich 0 sind. Wir versehen den Punkt A mit dem Gewicht p und den Punkt B mit dem Gewicht q. Das nennen wir gewichtete Punkte (A, p), (B, q).

15. Teilverhältnis als Gleichgewicht

Es seien $A \neq B$ zwei Punkte. Es seien $p, q \geq 0$ reelle Zahlen, die nicht beide gleich 0 sind. Wir versehen den Punkt A mit dem Gewicht p und den Punkt B mit dem Gewicht q. Das nennen wir gewichtete Punkte (A, p), (B, q).

Wir fragen in welchem Punkt O man die Strecke $\overline{AB}$ mit den Gewichten p und q unterstützen muss, damit sie sich im Gleichgewicht befindet.

16.Gleichgewicht



$$\frac{a}{q} = \frac{b}{p}$$

$$q|OB| = p|OA|$$

Als Gleichung von Vektoren geschrieben:

$$p\,\vec{OA} + q\,\vec{OB} = \vec{0}$$

Die beiden Summanden sind Vektoren
der gleichen L''ange, die in entgegengesetzte Richtungen zeigen.

Wir betrachten gewichtete Punkte (A, p), (B, q), wobei die Zahlen p und q auch negativ sein dürfen.

Definition

Es sei $p + q \neq 0$. Wir nennen O einen Schwerpunkt von (A, p) und (B, q), wenn

$$p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} = \vec{0}.$$

18.Die Existenz von Schwerpunkten

Proposition

Es sei $p+q \neq 0$. *Es seien* (A,p) *und* (B,q) *zwei gewichtete Punkte. Dann gibt es einen Schwerpunkt* O. *Für jeden beliebigen Punkt* $M \in E$ *gilt:*

$$p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB} = (p+q)\overrightarrow{MO}.$$

18.Die Existenz von Schwerpunkten

Proposition

Es sei $p+q \neq 0$. Es seien (A,p) und (B,q) zwei gewichtete Punkte. Dann gibt es einen Schwerpunkt O. Für jeden beliebigen Punkt $M \in E$ gilt:

$$p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB} = (p+q)\overrightarrow{MO}.$$

Beweis: Es sei $M \in E$ ein beliebig gewählter Punkt. Es sei

$$\vec{v} = p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB}.$$

19.Beweis für die Existenz von Schwerpunkten

Es sei

$$\frac{1}{p+q}v = \overrightarrow{MO}, \quad O = M + \frac{1}{p+q}v.$$

Dann gilt

$$p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB} = (p+q)\overrightarrow{MO}.$$

Wir zeigen, dass diese Gleichung auch gilt, wenn man M durch irgendeinen anderen Punkt $N \in E$ ersetzt.

20.Beweis für die Existenz von Schwerpunkten

$$p\overrightarrow{NA} + q\overrightarrow{NB} = p(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA}) + q(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MB}) =$$

$$p\overrightarrow{NM} + q\overrightarrow{NM} + p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB} = (p+q)\overrightarrow{NM} + v =$$

$$(p+q)\overrightarrow{NM} + (p+q)\overrightarrow{MO} = (p+q)\overrightarrow{NO}.$$

Wenn man $N = O$ setzt, so findet man die Gleichung:

$$p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} = (p+q)\overrightarrow{OO} = \vec{0}.$$

21. Punkte einer Geraden als Schwerpunkte

Folgerung

Es seien $A, B \in E$ *zwei verschiedene Punkte. Dann besteht die Gerade* AB *aus den Punkten* O, *die man als Schwerpunkt von zwei gewichteten Punkten* (A, p), (B, q) *erhält, wobei* p, q *beliebige reelle Zahlen sind, so dass* $p + q \neq 0$.

21. Punkte einer Geraden als Schwerpunkte

Folgerung

Es seien $A, B \in E$ *zwei verschiedene Punkte. Dann besteht die Gerade* AB *aus den Punkten* O*, die man als Schwerpunkt von zwei gewichteten Punkten* (A, p)*,* (B, q) *erhält, wobei* p, q *beliebige reelle Zahlen sind, so dass* $p + q \neq 0$*.*

Wenn O *der Schwerpunkt der gewichteten Punkte* (A, p)*,* (B, q) *ist und wenn* O *auch der Schwerpunkt der gewichteten Punkte* (A, p_1)*,* (B, q_1) *ist, so gibt es eine Zahl* $c \neq 0$*, so dass*

$$p_1 = cp, \quad q_1 = cq.$$

22. Punkte einer Geraden als Schwerpunkte

Es sei O der Schwerpunkt der gewichteten Punkte (A, p), (B, q):

$$p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB} = (p+q)\overrightarrow{MO}, \quad M \in E.$$

Wir setzen $M = A$ und erhalten:

$$q\overrightarrow{AB} = (p+q)\overrightarrow{AO}.$$

Da $p + q \neq 0$, folgt $O \in AB$. Wenn $O \in AB$ ein beliebiger Punkt ist, so ist $\overrightarrow{AO}$ eine Streckung des Vektors $\overrightarrow{AB}$. Deshalb erhält man O als Schwerpunkt, wie im ersten Teil der Folgerung behauptet wurde.

23. Punkte einer Geraden als Schwerpunkte

Wenn O auch noch der Schwerpunkt der gewichteten Punkte (A, p_1), (B, q_1) ist so gilt:

$$q_1 \overrightarrow{AB} = (p_1 + q_1)\overrightarrow{AO}.$$

Zusammen mit dem letzten Blatt erhalten wir

$$\frac{q}{p+q} = \frac{q_1}{p_1 + q_1} \quad \Leftrightarrow \quad qp_1 = q_1 p.$$

Angenommen $q \neq 0$. Dann gilt

$$p_1 = \frac{q_1}{q} p, \quad q_1 = \frac{q_1}{q} q,$$

Dann ist $c = (q_1/q)$ die gesuchte Zahl. Wenn $q = 0$ ist $p = p + q \neq 0$ und dann ist $c = (p_1/p)$ die gsuchte Zahl.

24. Schwerpunkt von mehreren gewichteten Punkten

Proposition

Es seien (A, p), (B, q) *und* (C, r) *drei gewichtete Punkte in der Ebene, so dass* $p + q + r \neq 0$. *Dann gibt es genau einen Punkt* $S \in E$, *so dass für alle Punkte* $M \in E$

$$p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB} + r\overrightarrow{MC} = (p + q + r)\overrightarrow{MS}. \tag{1}$$

Man nennt S *den Schwerpunkt von* (A, p), (B, q) *und* (C, r).

24. Schwerpunkt von mehreren gewichteten Punkten

Proposition

Es seien (A,p), (B,q) *und* (C,r) *drei gewichtete Punkte in der Ebene, so dass* $p+q+r\neq 0$. *Dann gibt es genau einen Punkt* $S\in E$, *so dass für alle Punkte* $M\in E$

$$p\overrightarrow{MA}+q\overrightarrow{MB}+r\overrightarrow{MC}=(p+q+r)\overrightarrow{MS}. \tag{1}$$

Man nennt S *den Schwerpunkt von* (A,p), (B,q) *und* (C,r).

Beweis: Wir nehmen an, dass $p+q\neq 0$. Es sei O der Schwerpunkt der gewichteten Punkte (A,p), (B,q). Dann gilt für alle $M\in E$:

25.Beweis zum Schwerpunkt

$$p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB} = (p+q)\overrightarrow{MO}.$$

25.Beweis zum Schwerpunkt

$$p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB} = (p+q)\overrightarrow{MO}.$$

Es sei S der Schwerpunkt der gewichteten Punkte $(O, p+q)$, (C, r). Dann gilt:

$$(p+q)\overrightarrow{MO} + r\overrightarrow{MC} = (p+q+r)\overrightarrow{MS} \tag{2}$$

Mit der oberen Gleichung zusammen ergibt sich

$$p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB} + r\overrightarrow{MC} = (p+q+r)\overrightarrow{MS}.$$

26.Die erste Folgerung über Schwerpunkte

Folgerung

Mit den Bezeichnungen der letzten Proposition sei O der Schwerpunkt von (A,p) und (B,q). Dann liegen die Punkte C,S,O auf einer Geraden.

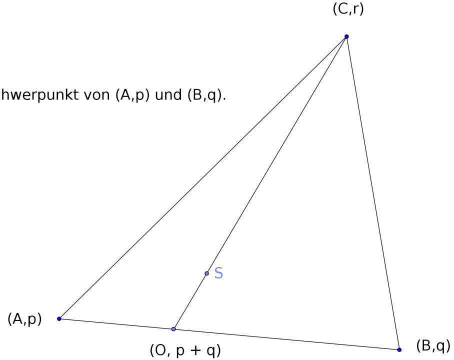
Beweis: Wenn man in der Gleichung (1) auf dem letzten Blatt $M = O$ setzt, so ergibt sich

$$r\overrightarrow{OC} = (p+q+r)\overrightarrow{OS}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Zur ersten Folgerung

O ist der Schwerpunkt von (A,p) und (B,q).



S ist auch der Schwerpunkt von (C,r) und (O,p+q).

vergleiche (2) Blatt 25

27.Die zweite Folgerung über Schwerpunkte

Folgerung

Mit den Bezeichnungen der Proposition seien p_1, q_1, r_1 Zahlen, so dass $p_1 + q_1 + r_1 \neq 0$ und so dass S auch der Schwerpunkt der gewichteten Punkte (A, p_1), (B, q_1) und (C, r_1) ist.
Dann gibt es eine Zahl $c \neq 0$, so dass

$$p_1 = cp, \; q_1 = cq, \; r_1 = cr$$

Beweis: Wir machen uns das in dem Fall klar, wo $C \neq S$ und wo CS die Gerade AB schneidet. Es sei O der Schnittpunkt.

Nach dem Blatt 26 ist O sowohl der Schwerpunkt von (A,p), (B,q) als auch von (A,p_1), (B,q_1). Dann gilt $p_1 = cp$ und $q_1 = cq$. Wir dürfen die Gewichte p,q,r durch cp,cq,cr ersetzen. Also dürfen wir annehmen, dass $p_1 = p$ und $q_1 = q$. Dann folgt

$$p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB} + r_1\overrightarrow{MC} = (p+q+r_1)\overrightarrow{MS}.$$

Wir setzen $M = S$ und vergleichen das mit (1) Blatt24 für $M = S$. Dann folgt: $r\overrightarrow{SC} = r_1\overrightarrow{SC}$. Da $S \neq C$, folgt $r = r_1$.