Elementare Geometrie Vorlesung 14

Thomas Zink

12.6.2017

1.Die Parallelprojektion

Es seien E und E' zwei Ebenen im Raum. Es sei ℓ eine Gerade, die zu keiner der beiden Ebenen parallel ist. Dann definieren wir eine Abbildung

$$\pi : E \to E'.$$

1.Die Parallelprojektion

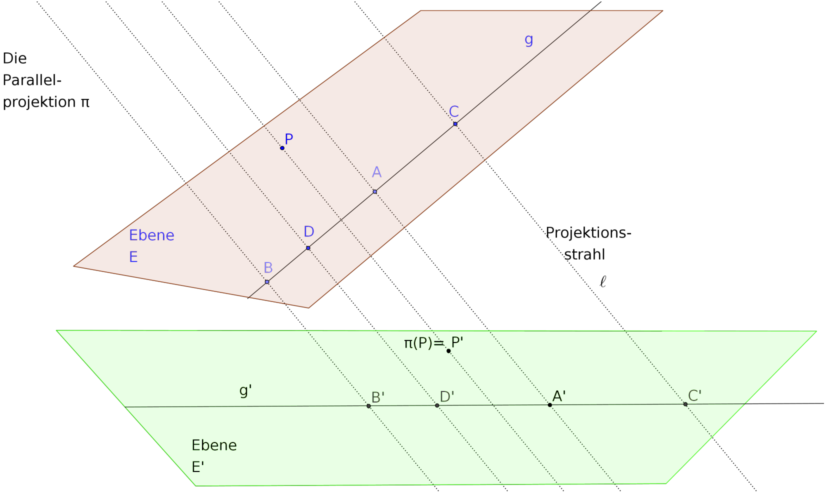
Es seien E und E' zwei Ebenen im Raum. Es sei ℓ eine Gerade, die zu keiner der beiden Ebenen parallel ist. Dann definieren wir eine Abbildung

$$\pi : E \to E'.$$

Es sei $P \in E$. Es sei m die Parallele zu ℓ durch den Punkt P. Dann definieren wir

$$\pi(P) = m \cap E'.$$

2. Parallelprojektion von E auf E'



3. Eigenschaften der Parallelprojektion

Wir nennen $\pi : E \to E'$ die Parallelprojektion längs ℓ von E auf E'.
Es sei $\rho : E' \to E$ die Parallelprojektion längs der gleichen Gerade ℓ. Dann ist ρ die Umkehrabbildung zu π:

$$\rho \circ \pi = \mathrm{id}_E, \quad \pi \circ \rho = \mathrm{id}_{E'}\,.$$

3. Eigenschaften der Parallelprojektion

Wir nennen $\pi : E \to E'$ die Parallelprojektion längs ℓ von E auf E'.
Es sei $\rho : E' \to E$ die Parallelprojektion längs der gleichen Gerade ℓ. Dann ist ρ die Umkehrabbildung zu π:

$$\rho \circ \pi = \mathrm{id}_E, \quad \pi \circ \rho = \mathrm{id}_{E'} .$$

Es sei $g \subset E$ eine Gerade. Dann ist $g' = \pi(g) \subset E'$ eine Gerade und $\pi : g \to g'$ eine affine Abbildung.

Es seien E und E' Ebenen. Eine Abbildung $\pi : E \to E'$ heißt affin, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(1) π is bijektiv.

(2) Wenn $g \subset E$ eine Gerade ist, so auch das Bild $\pi(g) \subset E'$.

(3) Es seien $A, B, C \in E$ drei verschiedene Punkte, die auf einer Geraden liegen. Dann gilt für die Teilverhältnisse

$$\frac{CA}{CB} = \frac{\pi(C)\pi(A)}{\pi(C)\pi(B)}.$$

5.Affine Abbildungen von Ebenen

Es sei $\pi : E \to E'$ affin. Es sei $g \subset E$ und $g' = \pi(g)$. Dann ist die Einschränkung

$$\pi : g \to g', \quad A \mapsto \pi(A)$$

eine affine Abbildung von Geraden (Vorlesung 11,8).

5.Affine Abbildungen von Ebenen

Es sei $\pi : E \to E'$ affin. Es sei $g \subset E$ und $g' = \pi(g)$. Dann ist die Einschränkung

$$\pi : g \to g', \quad A \mapsto \pi(A)$$

eine affine Abbildung von Geraden (Vorlesung 11,8).

Wenn $\pi : E \to E'$ eine affine Abbildung ist, so ist auch die inverse Abbildung eine affine Abbildung.

6.Affine Abbildungen erhalten Parallelen

Es sei π affin wie oben. Es seien $g, h \subset E$ zwei parallele Geraden. Dann sind auch die Geraden $\pi(g), \pi(h) \in E'$ parallel.

6.Affine Abbildungen erhalten Parallelen

Es sei π affin wie oben. Es seien $g, h \subset E$ zwei parallele Geraden. Dann sind auch die Geraden $\pi(g), \pi(h) \in E'$ parallel.

In der Tat, angenommen es gäbe einen Schnittpunkt $S = \pi(g) \cap \pi(h)$. Dann gibt es einen Punkt $P \in g$ und einen Punkt $Q \in h$, so dass $\pi(P) = S$, $\pi(Q) = S$. Da g und h parallel sind, gilt $P \neq Q$. Aber dann kann π nicht injektiv sein. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass S existiert.

7.Isometrien

Eine Abbildung $\kappa : E \to E'$ heißt Isometrie, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

(1) κ is bijektiv.

(2) Wenn $g \subset E$ eine Gerade ist, so auch das Bild $\kappa(g) \subset E'$.

(3) Es seien $A, B \in E$. Dann gilt:

$$|\kappa(A)\kappa(B)| = |AB|.$$

8.Isometrien sind affine Abbildungen

Proposition

Eine Isometrie κ ist eine affine Abbildung.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass Teilverhältnisse erhalten bleiben. Es seien A, B, C drei Punkte auf einer Geraden. Dann gilt

$$\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|\kappa(C)\kappa(A)|}{|\kappa(C)\kappa(B)|}.$$

8.Isometrien sind affine Abbildungen

Proposition

Eine Isometrie κ ist eine affine Abbildung.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass Teilverhältnisse erhalten bleiben. Es seien A, B, C drei Punkte auf einer Geraden. Dann gilt

$$\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|\kappa(C)\kappa(A)|}{|\kappa(C)\kappa(B)|}.$$

Wir müssen nur zeigen, dass auf beiden Seiten der letzten Gleichung dasselbe Vorzeichen steht, wenn wir die Absolutstriche weglassen. Das folgt aus folgender Tatsache:

9.Isometrien sind affine Abbildungen

$$C \in \overline{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \kappa(C) \in \overline{\kappa(A)\kappa(B)}.$$

Diese Behauptung folgt, weil ein Punkt $C \in AB$ genau dann zu der Strecke $\overline{AB}$ gehört, wenn gilt:

$$|AC| + |CB| = |AB|.$$

10.Konstruktion affiner Abbildungen

Wir wollen affine Abbildungen zeichnen. Dazu denken wir uns unser Zeichenblatt als die Ebene E'.
Die Ebene E möge E' in einer Geraden s schneiden. Das nennt man die Spur von E auf unserem Zeichenblatt.

10.Konstruktion affiner Abbildungen

Wir wollen affine Abbildungen zeichnen. Dazu denken wir uns unser Zeichenblatt als die Ebene E'.
Die Ebene E möge E' in einer Geraden s schneiden. Das nennt man die Spur von E auf unserem Zeichenblatt.

Es sei $P \in E$ und es sei P' der Fußpunkt des Lots von P auf die Ebene E'. Man versieht den Punkt P' mit der Kotierung $\pm|PP'|$, wobei man $+$ schreibt, wenn P über der Ebene E' liegt und $-$, wenn er darunter liegt.

11.Kotierungen, Stützdreieck einer Ebene

Die Kotierung ist eine Möglichkeit einen Punkt P, der nicht in unser Zeichenebene E' liegt, darzustellen. Wir schreiben

$$P'(4)$$

für den Punkt P, der 4 Einheiten senkrecht über P' liegt.

11.Kotierungen, Stützdreieck einer Ebene

Die Kotierung ist eine Möglichkeit einen Punkt P, der nicht in unser Zeichenebene E' liegt, darzustellen. Wir schreiben

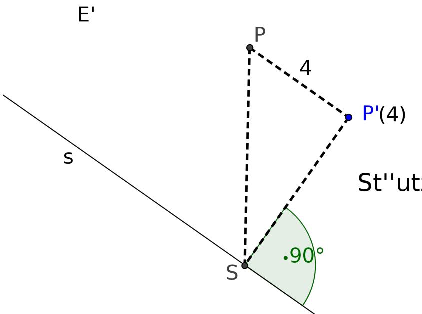
$$P'(4)$$

für den Punkt P, der 4 Einheiten senkrecht über P' liegt.

Es sei S der Fußpunkt des Lots von P' auf die Gerade s. Man nennt SPP' das Stützdreieck des Punktes $P \in E$.

12.Stützdreiecke der Ebene E

Es sei E eine Ebene mit der Spur s auf E'.
Es sei P ε E als kotierter Punkt gegeben.
Das Bild zeigt das um die Achse SP' in
die Zeichenebene geklappte



St''utzdreieck P'PS

13.Die Klappung

Wir drehen jetzt die Ebene E um die Achse s bis sie mit E' zusammenfällt. (Dafür gibt es zwei Möglichkeiten.) Das nennt man die Klappung um s. Der Punkt P fällt dann auf einen Punkt $P_* \in E'$. Die Abbildung

$$\kappa : E \to E', \quad P \mapsto P_*$$

ist eine Isometrie.

13.Die Klappung

Wir drehen jetzt die Ebene E um die Achse s bis sie mit E' zusammenfällt. (Dafür gibt es zwei Möglichkeiten.) Das nennt man die Klappung um s. Der Punkt P fällt dann auf einen Punkt $P_* \in E'$. Die Abbildung

$$\kappa : E \to E', \quad P \mapsto P_*$$

ist eine Isometrie.

Figuren auf E sehen wir nach der Klappung in wahrer Größe in der Zeichenebene E'.

14.Konstruktion einer affinen Abbildung

Eine Figur auf E können wir in wahrer Größe in E' zeichnen, und dann in die Ebene E zurückklappen. Es sei

$$\rho : E \to E'$$

die Projektion längs einer Senkrechten auf der Ebene E'.
Das Kompositum $\rho \circ \kappa^{-1} : E' \to E'$ ist eine affine Abbildung:

$$\begin{array}{ccccc} E' & \xrightarrow{\kappa^{-1}} & E & \xrightarrow{\rho} & E' \\ P_* & \longmapsto & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

15.Das Kompositum affiner Abbildungen ist affin

Proposition

Es seien $\pi : E \to E'$ *und* $\omega : E' \to E''$ *affine Abbildungen.*
Dann ist auch $\omega \circ \pi : E \to E''$ *eine affine Abbildung.*

15.Das Kompositum affiner Abbildungen ist affin

Proposition

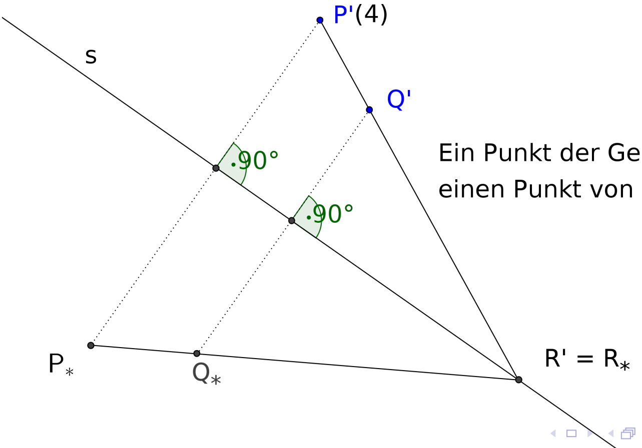
Es seien $\pi : E \to E'$ und $\omega : E' \to E''$ affine Abbildungen. Dann ist auch $\omega \circ \pi : E \to E''$ eine affine Abbildung.

Für einen beliebigen Punkt Q_* kann man Q' konstruieren ohne die Kotierung von Q und das Stützdreieck:

16.Der Schatten Q' eines Punktes

P_*P' schneidet s im rechten Winkel nach Konstruktion der Klappung.

Das gleiche gilt dann f''ur Q_*Q'. Wenn $R' \in s$, so gilt $R = R' = R_*$.



Ein Punkt der Geraden P_*R_* wird auf einen Punkt von P'R' abbgebildet.

Schatten eines Dreiecks

Statt ein Dreieck ABC auf E festzulegen, benutzen wir die Klappung $A_*B_*C_*$. Beide Dreiecke sind kongruent. Das Dreieck $A'B'C'$ nennen wir auch den Schatten von ABC bei der orthogonalen Projektion.

Schatten eines Dreiecks

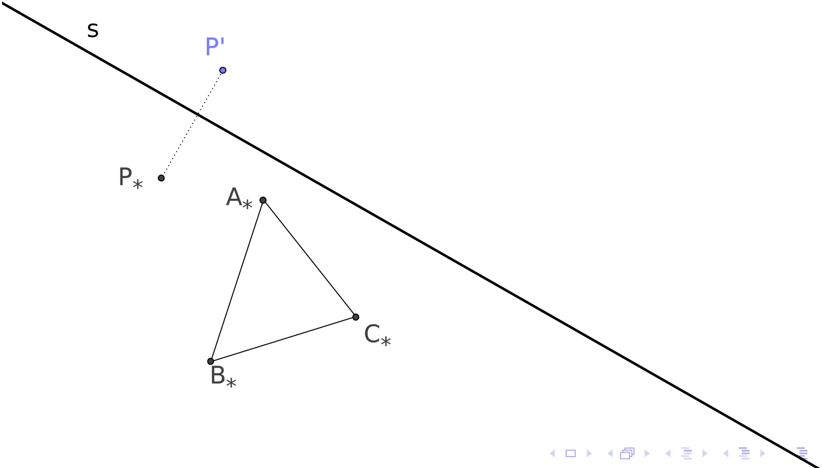
Statt ein Dreieck ABC auf E festzulegen, benutzen wir die Klappung $A_*B_*C_*$. Beide Dreiecke sind kongruent. Das Dreieck $A'B'C'$ nennen wir auch den Schatten von ABC bei der orthogonalen Projektion.

Wenn $A_*B_*C_*$ gegeben ist können wir folgendermassen den Schatten $A'B'C'$ konstruieren, wenn wir für einen einzigen Punkt $P \in E$ die Punkte P' und P_* kennen:

17.Konstruktion des Schattens

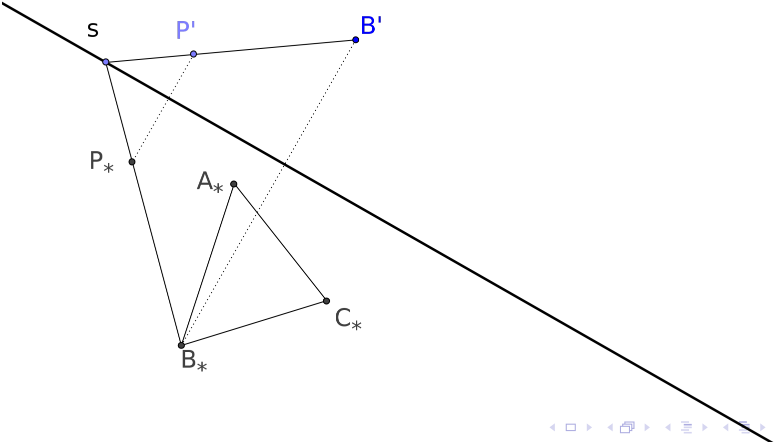
Der Schatten eines Dreiecks ABC.

$A_*B_*C_*$ ist ein kongruentes Dreieck.



Der Schatten eines Dreiecks ABC.

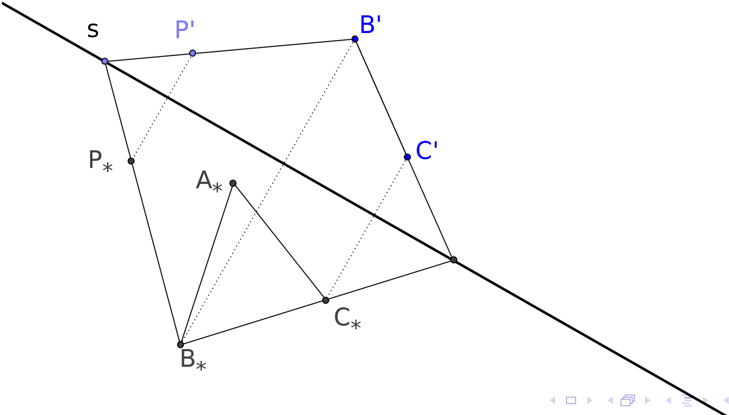
$A_*B_*C_*$ ist ein kongruentes Dreieck.



19.Konstruktion des Schattens

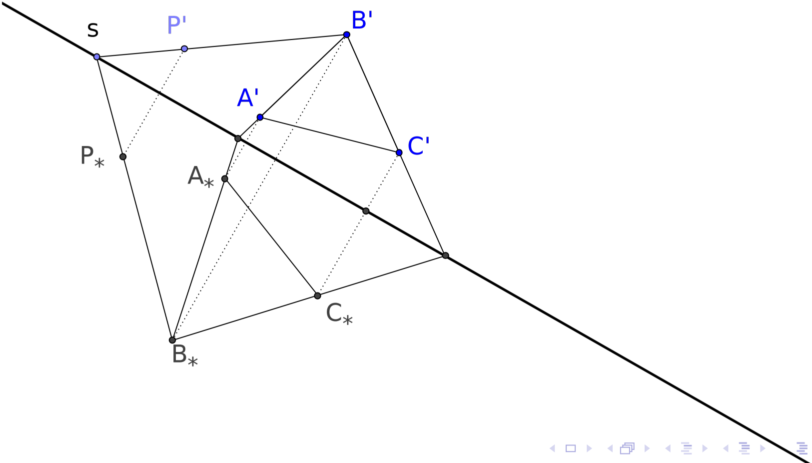
Der Schatten eines Dreiecks ABC.

$A_*B_*C_*$ ist ein kongruentes Dreieck.



20.Konstruktion des Schattens

Der Schatten eines Dreiecks ABC.
ist das Dreieck A'B'C'.



21.Fixpunkte

Proposition

Es sei $\tau : G \to G$ eine affine Abbildung. Wenn τ drei Fixpunkte hat, die nicht auf einer Geraden liegen, so gilt $\tau = \mathrm{id}_G$.

21.Fixpunkte

Proposition

Es sei $\tau : G \to G$ eine affine Abbildung. Wenn τ drei Fixpunkte hat, die nicht auf einer Geraden liegen, so gilt $\tau = \mathrm{id}_G$.

Beweis: Es seien A, B zwei verschiedene Fixpunkte. Es sei $g = AB$. Dann ist $\tau : g \to g$ eine affine Abbildung, die zwei Fixpunkte hat. Daher gilt $\tau(P) = P$ für $P \in g$ nach Vorlesung 11, 9 Proposition 2.

Proposition

Es sei $\tau : G \to G$ eine affine Abbildung. Wenn τ drei Fixpunkte hat, die nicht auf einer Geraden liegen, so gilt $\tau = \mathrm{id}_G$.

Beweis: Es seien A, B zwei verschiedene Fixpunkte. Es sei $g = AB$. Dann ist $\tau : g \to g$ eine affine Abbildung, die zwei Fixpunkte hat. Daher gilt $\tau(P) = P$ für $P \in g$ nach Vorlesung 11, 9 Proposition 2.

Es sei C ein weiterer Fixpunkt, der nicht auf AB liegt. Dann sind AB, BC und CA drei verschiedene Geraden. Jeder Punkt P, der auf einer dieser Geraden liegt, ist ein Fixpunkt.

22.Beweis

Wenn $Q \in G$, so findet man eine Gerade h durch Q die $AB \cup BC \cup CA$ in zwei verschiedenen Punkten trifft. Da dies Fixpunkte von τ sind, lässt τ jeden Punkt von h fest. $Q.E.D.$

23.Affine Abbildung mit Fixgerade s

Proposition

Es sei $\tau : G \to G$ *eine affine Abbildung, so dass* $\tau \neq \mathrm{id}_G$. *Es sei* $s \subset G$ *eine Gerade, so dass* $\tau(R) = R$ *für jeden Punkt* $R \in s$.

Es seien $A, B \in G$ *zwei Punkte die nicht auf* s *liegen. Dann gilt* $\tau(A) \neq A$ *und* $\tau(B) \neq B$. *Die Geraden* $A\tau(A)$ *und* $B\tau(B)$ *sind parallel.*

24.Beweis

Beweis: Wir nehmen an, dass $A\tau(A)$ die Gerade s in einem Punkt P schneidet. Wir legen eine Parallele zu $A\tau(A)$ durch B. Sie schneidet s in einem Punkt Q. Da AP und BQ parallel sind, sind auch die Bilder dieser Geraden bei τ parallel:

$$\tau(A)P \parallel \tau(B)Q.$$

24.Beweis

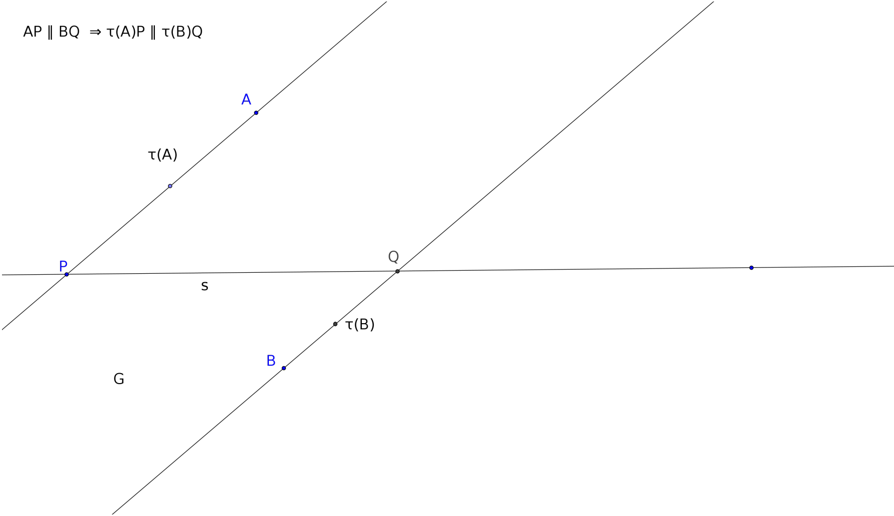
Beweis: Wir nehmen an, dass $A\tau(A)$ die Gerade s in einem Punkt P schneidet. Wir legen eine Parallele zu $A\tau(A)$ durch B. Sie schneidet s in einem Punkt Q. Da AP und BQ parallel sind, sind auch die Bilder dieser Geraden bei τ parallel:

$$\tau(A)P \parallel \tau(B)Q.$$

Da $A\tau(A) = P\tau(A)$ müssen die Punkte $B, Q, \tau(B)$ auf einer Geraden liegen. Also sind $A\tau(A)$ und $B\tau(B)$ parallel. Zusätzlich folgt, dass $B\tau(B)$ ebenfalls die Gerade s schneiden muss.

25. Beweis

$AP \parallel BQ \;\Rightarrow\; \tau(A)P \parallel \tau(B)Q$



Beweis:

Wir betrachten jetzt den Fall, wo $A\tau(A)$ die Gerade s nicht schneidet. Wenn $B\tau(B)$ die Gerade s schneiden würde, so auch $A\tau(A)$. Das folgt aus dem soeben Bewiesenen, wenn man die Rollen von A und B vertauscht. Also gilt

$$B\tau(B) \parallel s \quad \Rightarrow \quad B\tau(B) \parallel A\tau(A). \quad Q.E.D.$$

Beweis:

Wir betrachten jetzt den Fall, wo $A\tau(A)$ die Gerade s nicht schneidet. Wenn $B\tau(B)$ die Gerade s schneiden würde, so auch $A\tau(A)$. Das folgt aus dem soeben Bewiesenen, wenn man die Rollen von A und B vertauscht. Also gilt

$$B\tau(B) \parallel s \quad \Rightarrow \quad B\tau(B) \parallel A\tau(A). \quad Q.E.D.$$

Bemerkung: Wenn $AB \parallel s$, so folgt nach Anwendung von τ, dass $\tau(A)\tau(B) \parallel s$.