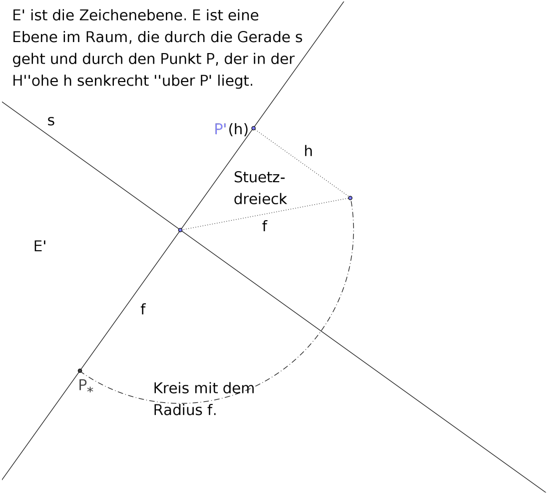
Elementare Geometrie Vorlesung 15

Thomas Zink

14.6.2017

1.Das Stützdreieck

E' ist die Zeichenebene. E ist eine Ebene im Raum, die durch die Gerade s geht und durch den Punkt P, der in der H''ohe h senkrecht ''uber P' liegt.



1.Das Stützdreieck

Die Ebene E im Raum schneidet die Zeichenebene E' in einer Geraden s. Man nennt s die Spur der Ebene E auf der Zeichenebene:

$$s = E \cap E'.$$

1.Das Stützdreieck

Die Ebene E im Raum schneidet die Zeichenebene E' in einer Geraden s. Man nennt s die Spur der Ebene E auf der Zeichenebene:

$$s = E \cap E'.$$

$P = P'(h)$ und P_* ist die Klappung von $P \in E$. Aus P' und h kann man P' und P_* konstruieren und umgekehrt.

2. Die schiefe Parallelprojektion

Wir betrachten eine Gerade ℓ, die weder zu E noch zu E' parallel ist. Wir haben die Parallelprojektion längs ℓ definiert:

$$\pi : E \to E'.$$

2. Die schiefe Parallelprojektion

Wir betrachten eine Gerade ℓ, die weder zu E noch zu E' parallel ist. Wir haben die Parallelprojektion längs ℓ definiert:

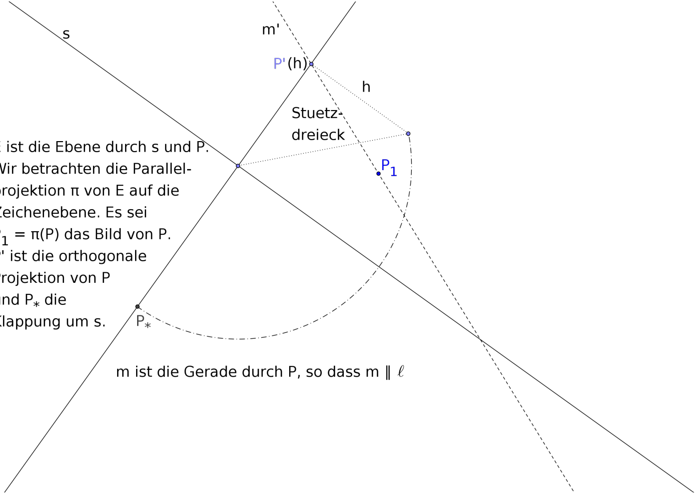
$$\pi : E \to E'.$$

Aus der Klappung der Ebene um s erhalten wir eine affine Abbildung:

$$E' \xrightarrow{\kappa^{-1}} E \xrightarrow{\pi} E'.$$

Es gilt: $(\pi \circ \kappa^{-1})(S) = S$, für alle $S \in s$.

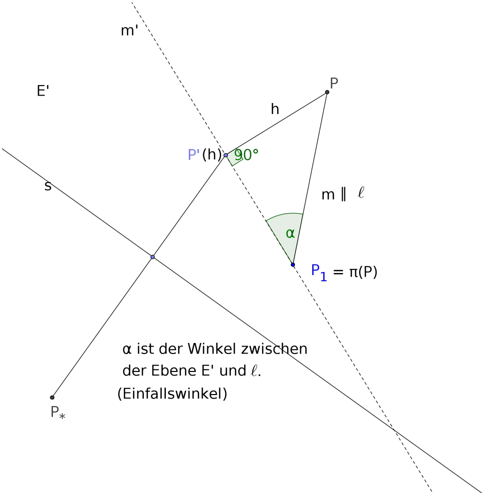
3.Die schiefe Parallelprojektion von E auf E'



E ist die Ebene durch s und P. Wir betrachten die Parallelprojektion π von E auf die Zeichenebene. Es sei $P_1 = \pi(P)$ das Bild von P. P' ist die orthogonale Projektion von P und P_* die Klappung um s.

m ist die Gerade durch P, so dass m ∥ ℓ

4.Die schiefe Parallelprojektion von E auf E'



α ist der Winkel zwischen der Ebene E' und ℓ.
(Einfallswinkel)

5.Die schiefe Parallelprojektion von E auf E'

Von einem Punkt $P \in E$ sei die Klappung $P_* = \kappa(P)$ und $P_1 = \pi(P)$ bekannt. Dann kann man direkt aus jedem vorgegebenen Punkt $Q_* \in E'$ den Punkt

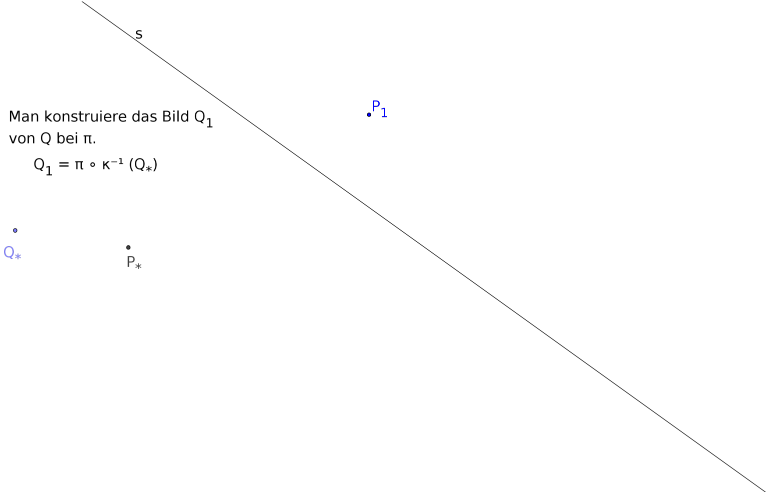
$$Q_1 = (\pi \circ \kappa^{-1})(Q_*)$$

konstruieren, ohne auf den Punkt $Q = \kappa^{-1}(Q_*) \in E$ bezug zu nehmen. Man benutzt, dass P_*P_1 und Q_*Q_1 parallel sind. (Vorlesung 14, Blatt 23).

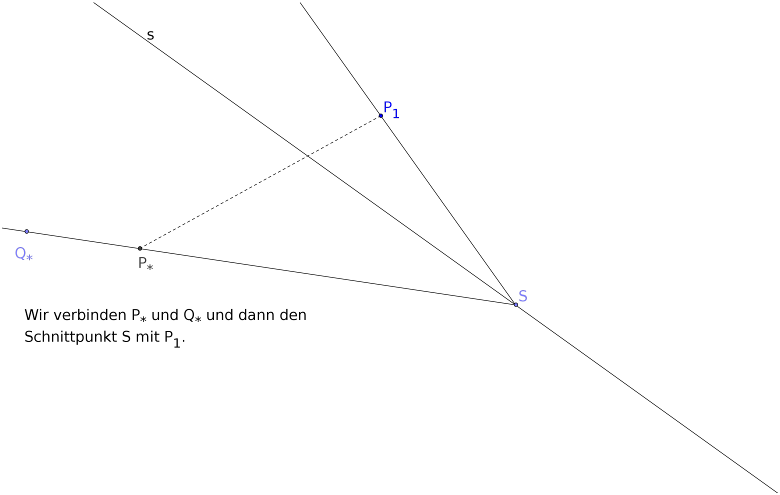
6.Konstruktion der schiefen Parallelprojektion

Man konstruiere das Bild Q_1 von Q bei π.

$$Q_1 = \pi \circ \kappa^{-1}(Q_*)$$

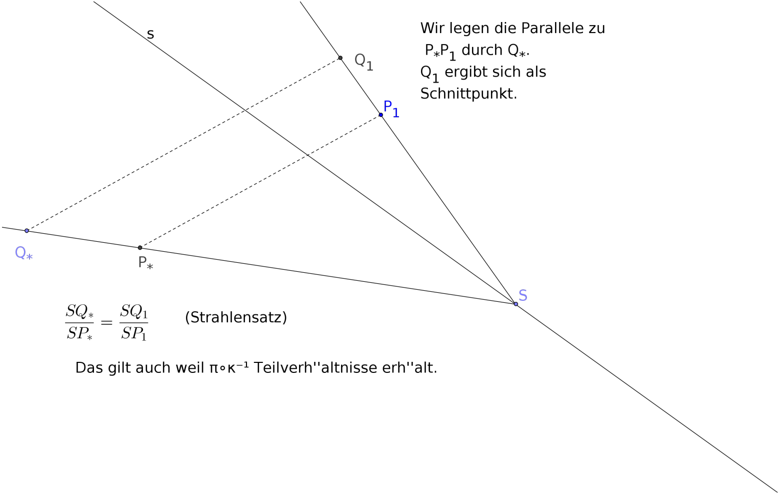


7.Konstruktion der schiefen Parallelprojektion



Wir verbinden P_* und Q_* und dann den Schnittpunkt S mit P_1.

8.Konstruktion der schiefen Parallelprojektion



Wir legen die Parallele zu P_*P_1 durch Q_*.
Q_1 ergibt sich als Schnittpunkt.

$$\frac{SQ_*}{SP_*} = \frac{SQ_1}{SP_1}$$ (Strahlensatz)

Das gilt auch weil $\pi\circ\kappa^{-1}$ Teilverh''altnisse erh''alt.

9.Bemerkung

Diese Konstruktion versagt, wenn P_*Q_* parallel zu s ist, da dann der Schnittpunkt S nicht existiert.
In diesem Fall sind die Bilder der beiden Geraden P_*Q_* und s unter $\pi \circ \kappa^{-1}$ wieder parallel. Also sind P_1Q_1 und s parallel. Also:

$$P_*Q_* \parallel P_1Q_1,$$

d.h. diese Geraden sind parallel.
Im vorliegenden Fall ist PQ parallel zu E'. Das nennt man eine Höhenlinie.

10.Ellipsen

Es sei $\pi : E \to E'$ eine orthogonale Parallelprojektion. Das bedeutet, dass wir längs einer Geraden ℓ projezieren, die senkrecht auf E' steht.

10.Ellipsen

Es sei $\pi : E \to E'$ eine orthogonale Parallelprojektion. Das bedeutet, dass wir längs einer Geraden ℓ projezieren, die senkrecht auf E' steht.

Definition

Das Bild eines Kreises $\mathcal{K}$ in der Ebene E bei π nennen wir eine Ellipse.

11. Konstruktion einr Ellipse

Es sei E' eine Ebene in der ein Kreis $\mathcal{K}_*$ liegt. Es sei s eine Gerade durch den Mittelpunkt M des Kreises.
Wir drehen die Ebene E' um s in den Raum und erhalten eine Ebene E und einen Kreis $\mathcal{K}$ auf E. Diese Drehung nennen wir aufklappen. Wir können auch wieder zuklappen:

$$\kappa : E \to E', \quad \kappa(\mathcal{K}) = \mathcal{K}_*.$$

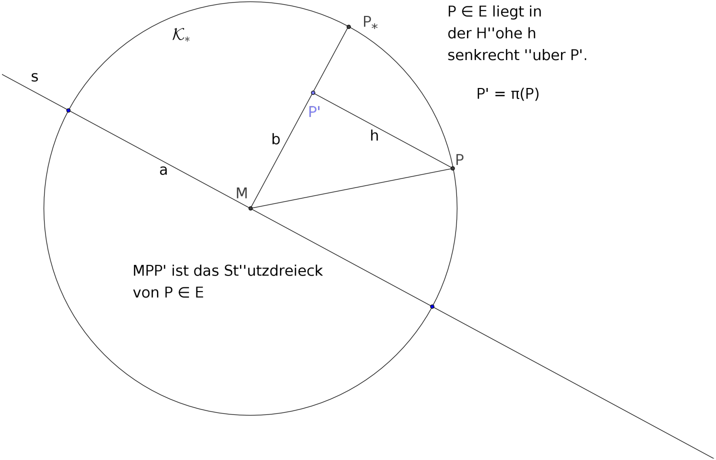
Die gesuchte Ellipse ist $\mathcal{E} := \pi(\mathcal{K})$

Es sei M der Mittelpunkt von $\mathcal{K}_*$. Wir wählen $P_* \in \mathcal{K}_*$, so dass P_*M orthogonal zu s ist.

12. Konstruktion einer Ellipse

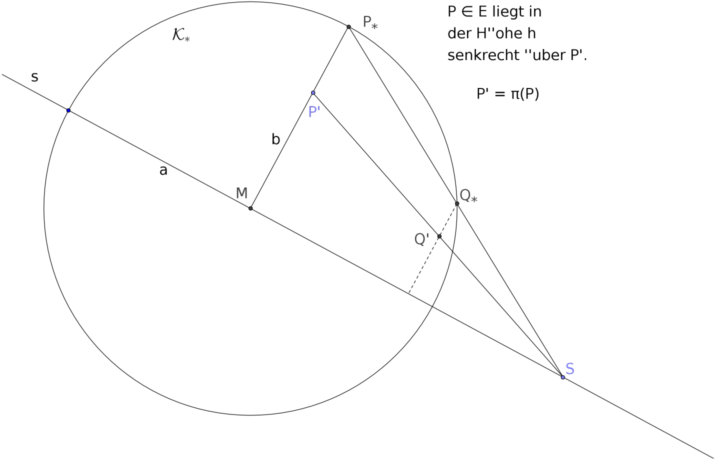
Es sei M der Mittelpunkt von $\mathcal{K}_*$. Wir wählen $P_* \in \mathcal{K}_*$, so dass P_*M orthogonal zu s ist.

Wir legen die Ebene E und den Punkt $P \in E$ dadurch fest, dass wir seine Projektion P' beliebig wählen. Dann ist P' ein Punkt der Ellipse E.
Weitere Punkte Q' der Ellipse erhalten wir, indem wir zu einem Punkt $Q_* \in \mathcal{K}_*$ den Punkt $Q' = \pi \circ \kappa^{-1}(Q_*)$ konstruieren.



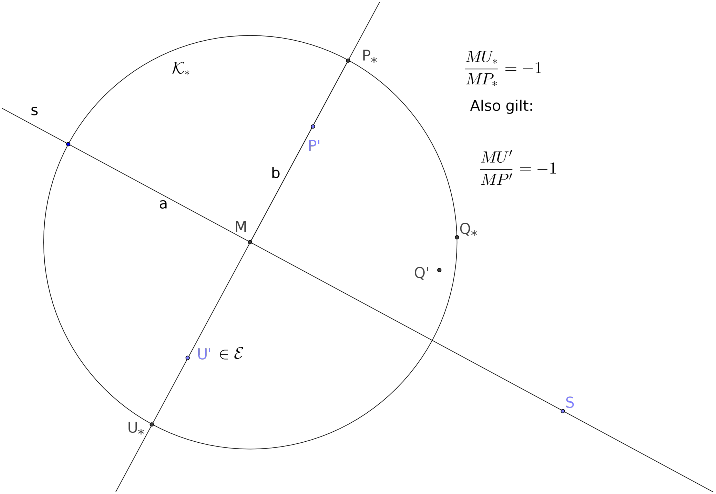
P ∈ E liegt in
der H''ohe h
senkrecht ''uber P'.

P' = π(P)



$P \in E$ liegt in
der H''ohe h
senkrecht ''uber P'.

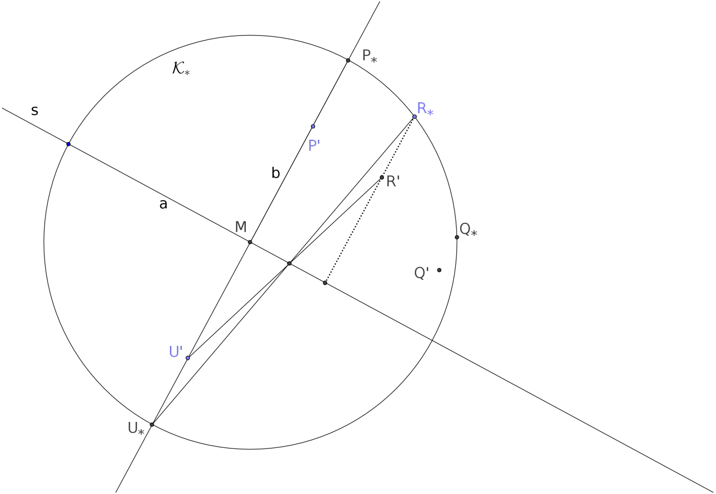
$P' = \pi(P)$



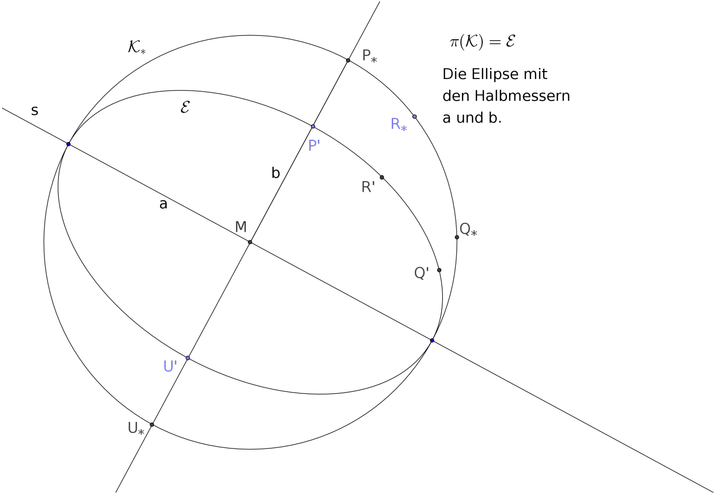
$$\frac{MU_*}{MP_*} = -1$$

Also gilt:

$$\frac{MU'}{MP'} = -1$$



P∗
$\mathcal{K}_*$
R∗
s
P'
b
R'
a
M
Q∗
Q'
U'
U∗



$\pi(\mathcal{K}) = \mathcal{E}$

Die Ellipse mit
den Halbmessern
a und b.

13. Die Gleichung der Ellipse

Wir betrachten ein $x - y$-Koordinatensystem in der Ebene. Der Punkt P habe die Koordinaten (x_0, y_0) und der Punkt Q die Koordinaten (x_1, y_1). Dann gilt

$$\text{Abstand } (P, Q) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

13. Die Gleichung der Ellipse

Wir betrachten ein $x - y$-Koordinatensystem in der Ebene. Der Punkt P habe die Koordinaten (x_0, y_0) und der Punkt Q die Koordinaten (x_1, y_1). Dann gilt

$$\text{Abstand } (P, Q) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

Es sei O der Punkt mit den Koordinaten $(0, 0)$. Der Kreis $\mathcal{C}$ mit dem Mittelpunkt O und dem Radius a ist

$$\mathcal{C} = \{P \mid \text{Abstand } (O, P) = a\} = \{P \widehat{=} (x, y) \mid x^2 + y^2 = a^2\}$$

14. Gleichung der Ellipse

Wir betrachten wieder den Kreis $\mathcal{K}_*$ mit der Gerade s durch den Mittelpunkt. Wir wählen das Koordinatensystem, so dass s mit der x-Achse übereinstimmt und der Ursprung O mit dem Mittelpunkt des Kreises.

14. Gleichung der Ellipse

Wir betrachten wieder den Kreis $\mathcal{K}_*$ mit der Gerade s durch den Mittelpunkt. Wir wählen das Koordinatensystem, so dass s mit der x-Achse übereinstimmt und der Ursprung O mit dem Mittelpunkt des Kreises.

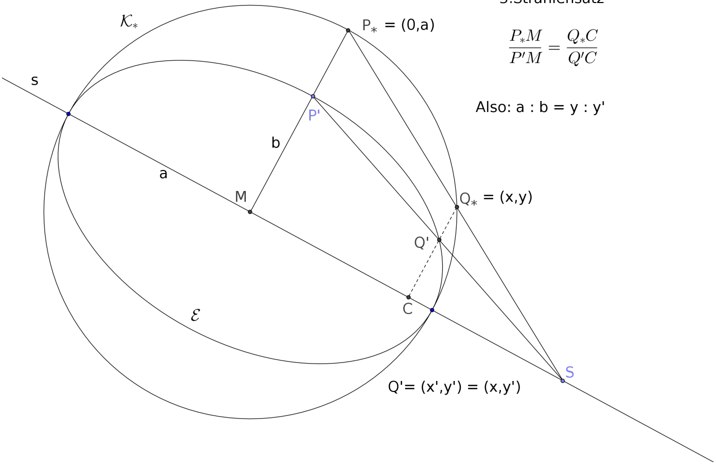
Wir werden zeigen, dass die Punkte (x, y) der Ellipse $\mathcal{E}$ folgende Gleichung erfüllen:

$$\mathcal{E}: \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

3.Strahlensatz

$$\frac{P_*M}{P'M} = \frac{Q_*C}{Q'C}$$

Also: a : b = y : y'



15. Gleichung der Ellipse

Es sei $Q_* \widehat{=} (x, y)$ ein Punkt des Kreises $\mathcal{K}_*$.

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{1}$$

Es sei $Q' = \pi(Q) \widehat{=} (x', y')$ der entsprechene Punkt der Ellipse.
Nach Konstruktion gilt $x = x'$. Nach obigen Bild gilt die Gleichung

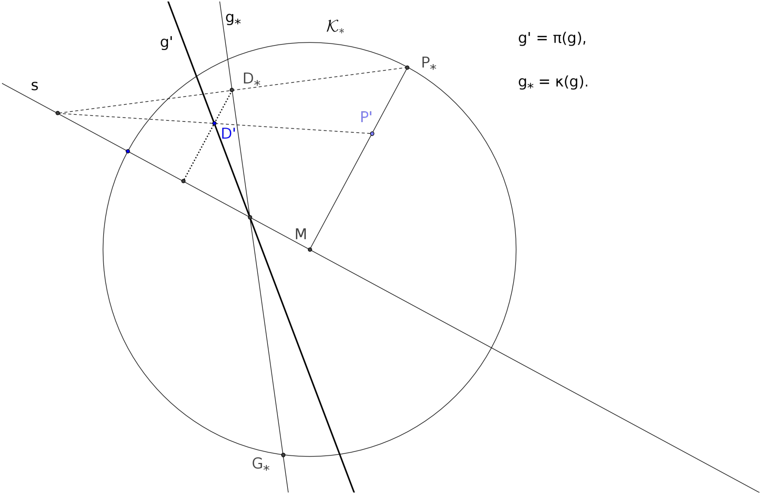
$$\frac{a}{b} = \frac{y}{y'}.$$

Man setzt das in die Gleichung (1) ein und erhält

$$(x')^2 + (y'\frac{a}{b})^2 = a^2, \quad \Rightarrow \left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1.$$

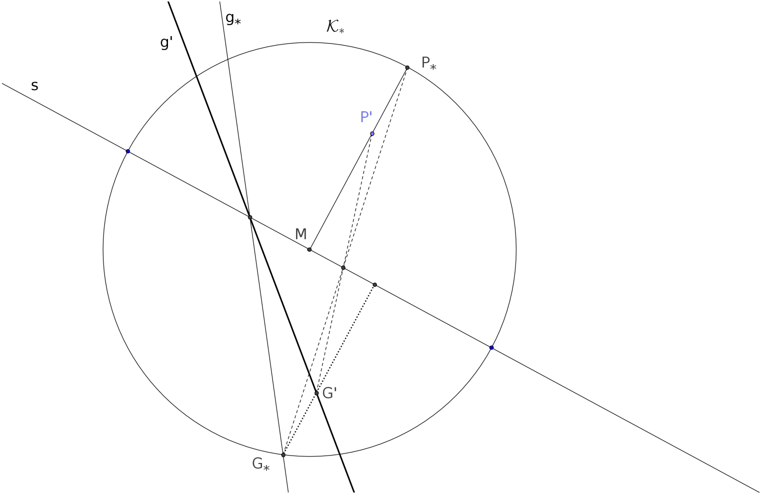
16. Schnitt einer Ellipse mit einer Geraden

Es sei g' eine Gerade. Man konstruiere die Schnittpunkte mit der Ellipse $\mathcal{E}$.
Lösung: g' ist die Projektion einer Geraden $g \subset E$, d.h. $\pi(g) = g'$.
Es sei $g_* = \kappa(g)$ die Klappung. Man findet die Schnittpunkte von g_* mit $\mathcal{K}_*$.
Es sei G_* ein Schnittpunkt. Dann gilt $G' \in \mathcal{E} \cap g'$.

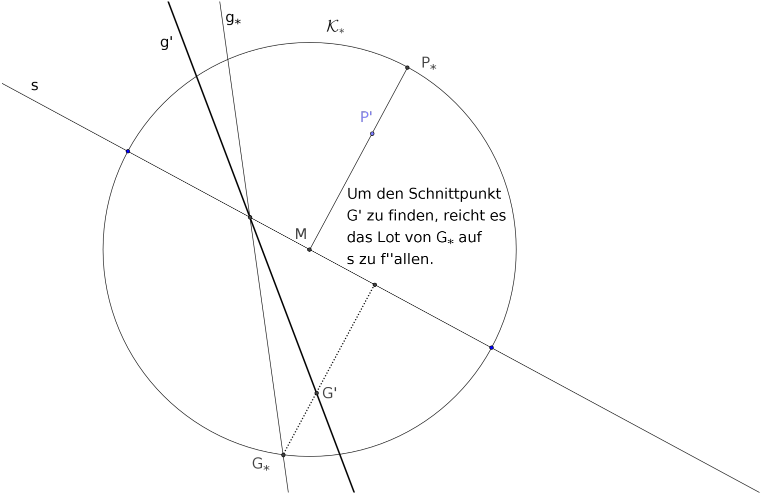


g' = π(g),

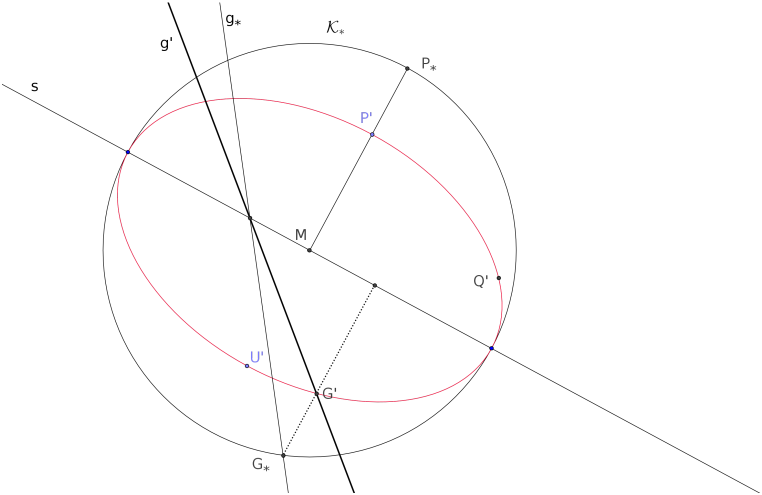
$g_* = \kappa(g)$.



g'
g*
K*
P*
P'
s
M
G'
G*



Um den Schnittpunkt G' zu finden, reicht es das Lot von G_* auf s zu f''allen.


g'
g_*
$\mathcal{K}_*$
P_*
s
P'
M
Q'
U'
G'
G_*