Elementare Geometrie Vorlesung 18

Thomas Zink

26.6.2017

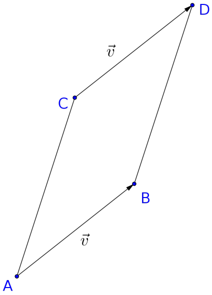
1.Bild eines Vektors bei einer affinen Abbildung

Es sei $f : E \to E'$ eine affine Abbildung von Ebenen. Es sei $\vec{v}$ ein Vektor der Ebene E, d.h. eine Translation.

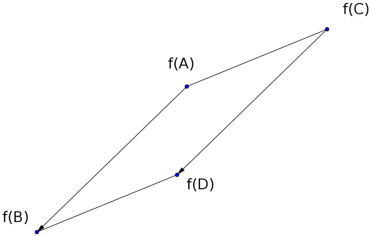
Es sei $A \in E$ und es sei $B = A + \vec{v}$. Dann ist $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Wir definieren:

$$\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist unabhängig von der Wahl des Punktes A:



f bildet das Parallelogramm ABDC
auf ein Parallelogramm ab.



Also:

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)} = \vec{f}(\vec{v})$$

3.Bild eines Vektors bei einer affinen Abbildung

Proposition

Es sei V_E *die Menge aller Vektoren von* E *und* $V_{E'}$ *die Menge aller Vektoren von* E'. *Es gibt ein Abbildung* $\vec{f} : V_E \to V_{E'}$, *so dass*

$$B = A + \vec{v} \quad \Rightarrow \quad f(B) = f(A) + \vec{f}(\vec{v}), \quad \textit{wenn } A \in E,\ v \in V_E.$$

$$\vec{f}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{f}(\vec{v}) + \vec{f}(\vec{w}), \quad \textit{wenn } v, w \in V_E$$

$$\vec{f}(\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{f}(\vec{v}) \qquad \textit{wenn } \lambda \textit{ eine reelle Zahl}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil f Teilverhältnisse erhält.

4.Koordinaten

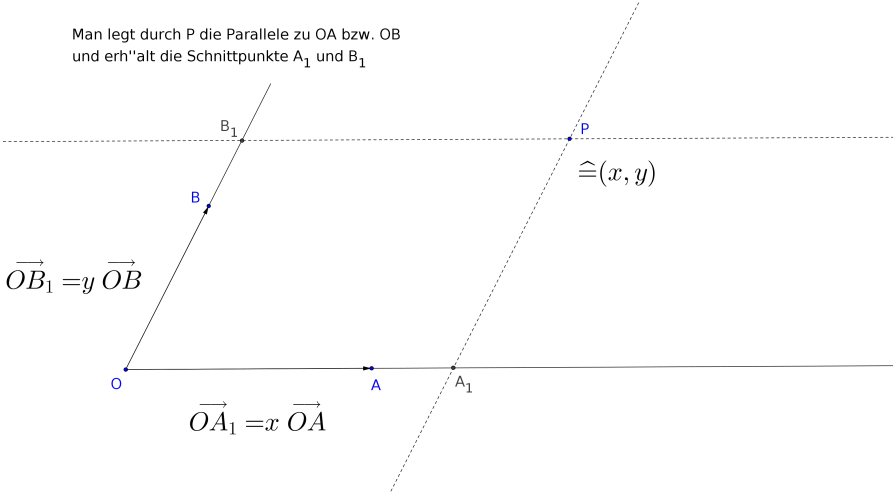
Es seien $O, A, B \in E$ drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann kann man jeden Punkt $P \in E$ schreiben

$$P = O + x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB},$$

wobei x und y reelle Zahlen sind. Man nennt (x, y) die Koordinaten von P. Wir schreiben

$$P \mathrel{\widehat{=}} (x, y).$$

Man legt durch P die Parallele zu OA bzw. OB
und erh''alt die Schnittpunkte A_1 und B_1



5.Koordinaten eines Vektors

Es sei $\vec{v}$ ein Vektor. Dann kann man schreiben

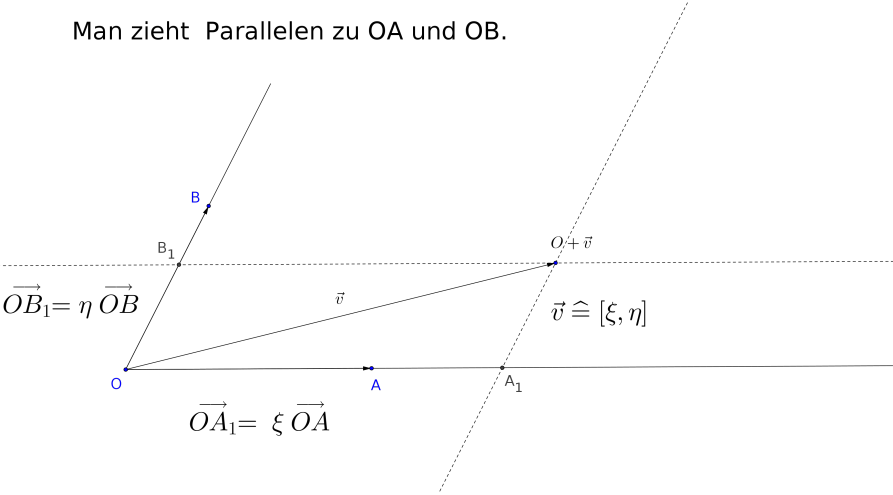
$$\vec{v} = \xi\overrightarrow{OA} + \eta\overrightarrow{OB},$$

wo ξ und η reelle Zahlen sind. Sie heißen die Koordinaten des Vektors $\vec{v}$:

$$\vec{v} \mathrel{\widehat{=}} [\xi, \eta]$$

Wir schreiben die Koordinaten von Vektoren in eckige Klammern.

Man zieht Parallelen zu OA und OB.



6.Die Translation in Koordinaten

Proposition

Es seien $P \widehat{=} (x, y)$ und $\vec{v} \widehat{=} [\xi, \eta]$ die Koordinaten.
Dann hat $P + \vec{v}$ die Koordinaten

$$(x + \xi, y + \eta).$$

Wenn wir Punkte und Vektoren, mit Koordinaten schreiben, so können wir die Proposition so schreiben:

$$(x, y) + [\xi, \eta] = (x + \xi, y + \eta).$$

7.Die Translation in Koordinaten

Beweis:

$$P + \vec{v} = (O + x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}) + (\xi\overrightarrow{OA} + \eta\overrightarrow{OB})$$
$$= O + (x + \xi)\overrightarrow{OA} + (y + \eta)\overrightarrow{OB}$$

Wir können daraus die Koordinaten des Punktes $P + \vec{v}$ ablesen.

8.kartesische Koordinaten

Wir nennen ein Koordinatensystem OAB kartesisch, wenn

(1) $|OA| = |OB| = 1$

(2) $\sphericalangle(OB, OA) = 90^o$

Es seien $P \mathrel{\widehat{=}} (x_0, y_0)$ und $Q \mathrel{\widehat{=}} (x_1, y_1)$ Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem. Dann gilt:

$$|PQ| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

9.orthogonale Vektoren

Es sei OAB ein kartesisches Koordinatensystem.

Proposition

Wenn wir einen Vektor $\vec{v} \,\widehat{=}\, [\xi, \eta]$ *um* 90^o *drehen, so erhalten wir den Vektor* $\vec{w} \,\widehat{=}\, [-\eta, \xi]$.

9.orthogonale Vektoren

Es sei OAB ein kartesisches Koordinatensystem.

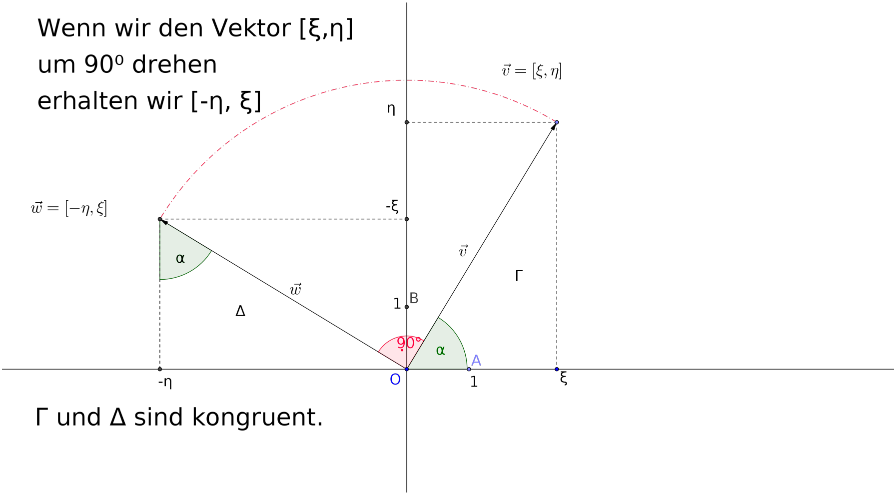
Proposition

Wenn wir einen Vektor $\vec{v} \mathrel{\widehat{=}} [\xi, \eta]$ um 90^o drehen, so erhalten wir den Vektor $\vec{w} \mathrel{\widehat{=}} [-\eta, \xi]$.

Jeder andere Vektor $\vec{u}$ der senkrecht auf $\vec{v}$ steht hat die Koordinaten $[-h\eta, h\xi] =: h[-\eta, \xi]$, wo h eine reelle Zahl.

Beweis:

Wenn wir den Vektor [ξ,η]
um 90⁰ drehen
erhalten wir [-η, ξ]



Γ und Δ sind kongruent.

10.Gleichungen einer affinen Abbildung

Es sei $f : E \to E'$ eine affine Abbildung. Es sei O, A, B eine Koordinatensystem in der Ebene E und O', A', B' ein Koordinatensystem in der Ebene E'.

Proposition

Es gibt reelle Zahlen a, b, c, d, m, n, so dass für jeden Punkt $P \in E$ gilt:

$$P \mathrel{\widehat{=}} (x, y) \quad \Rightarrow \quad f(P) \mathrel{\widehat{=}} (ax + cy + m, bx + dy + n).$$

$$\vec{v} \mathrel{\widehat{=}} [\xi, \eta] \quad \Rightarrow \quad \vec{f}(\vec{v}) \mathrel{\widehat{=}} [a\xi + c\eta, b\xi + d\eta].$$

11.Gleichungen einer affinen Abbildung

Die Zahlen a, b, c, d, m, n findet man so:

$$f(O) \mathrel{\widehat{=}} (m, n), \quad \vec{f}([1, 0]) = [a, b], \quad \vec{f}([0, 1]) = [c, d],$$

12.Gleichungen einer affinen Abbildung

Die letzte Proposition formuliert man auch so: $f : E \to E'$ sei eine affine Abbildung. Es seien ein Koordinatensystem auf E und auf E' gewählt.

12.Gleichungen einer affinen Abbildung

Die letzte Proposition formuliert man auch so: $f : E \to E'$ sei eine affine Abbildung. Es seien ein Koordinatensystem auf E und auf E' gewählt.

Es sei $P \widehat{=} (x, y)$ ein Punkt von E. Es seien (x', y') die Koordinaten von $f(P) \in E'$. Dann gilt

$$x' = ax + cy + m, \qquad y' = bx + dy + n. \tag{1}$$

Das nennen wir die Gleichungen einer affinen Abbildung.

13.Beweis der Proposition Blatt10:

Es sei $\vec{f}(\overrightarrow{OA}) \mathrel{\widehat{=}} [a, b]$ und $\vec{f}(\overrightarrow{OB}) \mathrel{\widehat{=}} [c, d]$, d.h.

$$\vec{f}(\overrightarrow{OA}) = a\overrightarrow{O'A'} + b\overrightarrow{O'B'}, \quad \vec{f}(\overrightarrow{OB}) = c\overrightarrow{O'A'} + d\overrightarrow{O'B'}$$

$$f(O) = O' + m\overrightarrow{O'A'} + n\overrightarrow{O'B'}$$

Es sei $P \in E$, $P \mathrel{\widehat{=}} (x, y)$, also

$$P = O + x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}.$$

14.Beweis:

$$f(P) = f(O) + x\vec{f}(\overrightarrow{OA}) + y\vec{f}(\overrightarrow{OB}) =$$

$$O' + m\overrightarrow{O'A'} + n\overrightarrow{O'B'} + x(a\overrightarrow{O'A'} + b\overrightarrow{O'B'}) + y(c\overrightarrow{O'A'} + d\overrightarrow{O'B'})$$

$$= O' + (ax + cy + m)\overrightarrow{O'A'} + (xb + yd + n)\overrightarrow{O'B'}.$$

15.Die Gleichungen einer Drehung

Wir fixieren ein kartesisches Koordinatensystem OAB Es sei α ein Drehwinkel. Es sei $D(\alpha) : E \to E$ die Drehung um den Punkt O und um den Winkel α.

15.Die Gleichungen einer Drehung

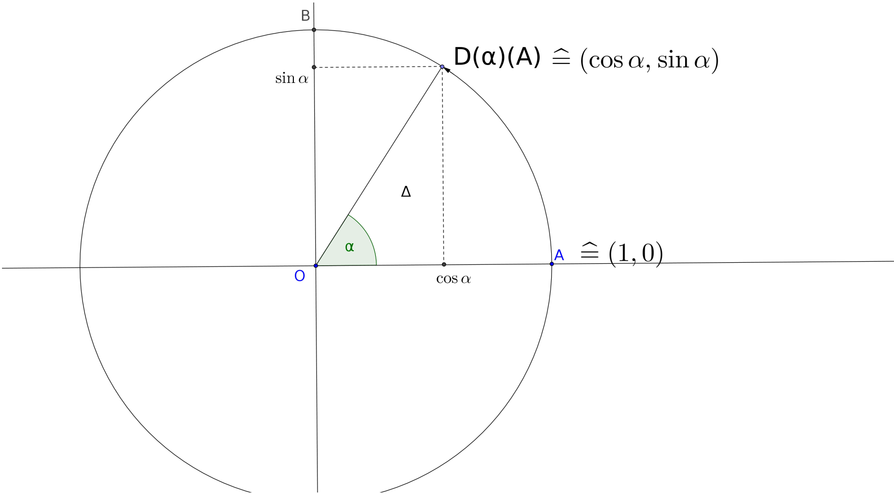
Wir fixieren ein kartesisches Koordinatensystem OAB Es sei α ein Drehwinkel. Es sei $D(\alpha) : E \to E$ die Drehung um den Punkt O und um den Winkel α.

Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes $D(\alpha)(A)$ mit

$$D(\alpha)(A) \mathrel{\widehat{=}} (\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Diese Gleichung schreiben wir auch:

$$D(\alpha)(1,0) = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad A \mathrel{\widehat{=}} (1,0).$$


B
D(α)(A) $\widehat{=} (\cos\alpha, \sin\alpha)$
$\sin\alpha$
Δ
α
A $\widehat{=} (1,0)$
O
$\cos\alpha$

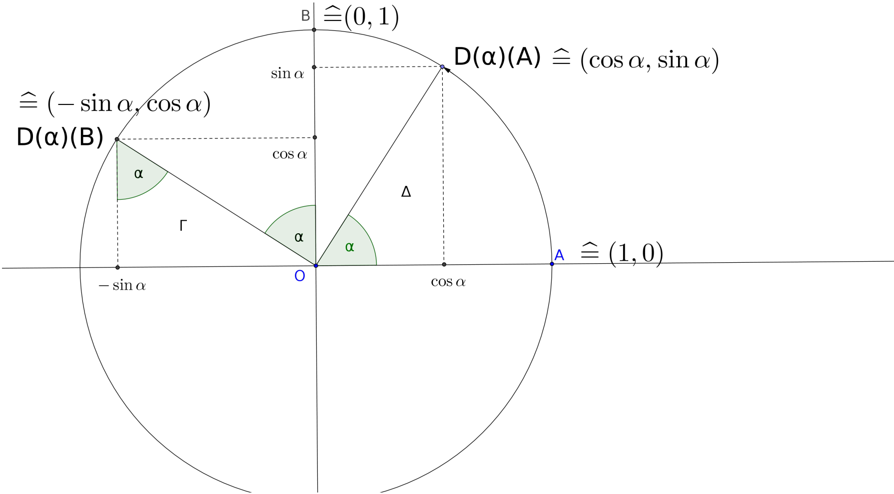
16.Die Gleichung einer Drehung

Wir berechnen die Koordinaten von $B' = D(\alpha)(B)$. Diesen Punkt erhält man, wenn man $A' = D(\alpha)(A)$ um 90^o um den Punkt O dreht. Wir wissen:

$$\overrightarrow{OA'} \mathrel{\widehat{=}} [\cos\alpha, \sin\alpha] \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OB'} \mathrel{\widehat{=}} [-\sin\alpha, \cos\alpha].$$

Also gilt:

$$D(\alpha)(B) \mathrel{\widehat{=}} D(\alpha)(0,1) = (-\sin\alpha, \cos\alpha).$$



B $\widehat{=}(0,1)$
$D(\alpha)(A) \ \widehat{=}\ (\cos\alpha, \sin\alpha)$
$\widehat{=}\ (-\sin\alpha, \cos\alpha)$
$D(\alpha)(B)$
$\sin\alpha$
$\cos\alpha$
α
α
α
Γ
Δ
A $\widehat{=}\ (1,0)$
O
$-\sin\alpha$
$\cos\alpha$

17.Die Gleichung einer Drehung

Wir finden die Gleichungen für die Drehung $D(\alpha)$. Es sei $D(\alpha)(x,y) = (x', y')$. Dann gilt:

17.Die Gleichung einer Drehung

Wir finden die Gleichungen für die Drehung $D(\alpha)$. Es sei $D(\alpha)(x, y) = (x', y')$. Dann gilt:

$$x' = (\cos \alpha)x - (\sin \alpha)y, \quad y' = (\sin \alpha)x + (\cos \alpha)y. \tag{2}$$

16.Die Additionstheoreme

Es seien α und β zwei Drehwinkel. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

In der Tat:

$$\begin{aligned}&(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))\\ &= D(\alpha+\beta)(1,0) = D(\alpha)\circ D(\beta)(1,0) = D(\alpha)(\cos\beta, \sin\beta)\\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta).\end{aligned}$$

19. Geometrische Winkel

Es sei α ein geometrischer Winkel. Das ist eine Zahl $0 \leq \alpha \leq 180$. Es sei $\tilde{\alpha}$ der Drehwinkel, der der Zahl α entspricht. Dann setzen wir:

$$\sin\alpha := \sin\tilde{\alpha}, \quad \cos\alpha := \cos\tilde{\alpha}$$

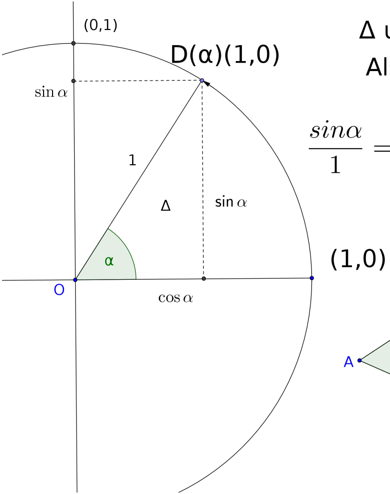
20. Rechtwinklige Dreiecke

Proposition

Es sei ABC ein Dreieck mit einem rechten Winkel in C. Dann gilt:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

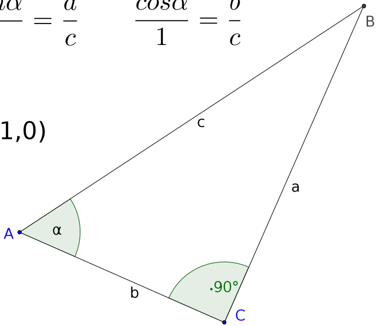
Nach Definition $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$.



Δ und ABC sind ''ahnlich.

Also gilt:

$$\frac{sin\alpha}{1} = \frac{a}{c} \qquad \frac{cos\alpha}{1} = \frac{b}{c}$$



21.Der Sinussatz

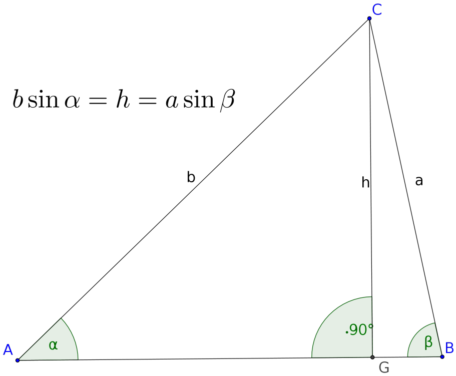
Proposition

Es sei ABC ein Dreieck. Dann gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

22.Der Sinussatz

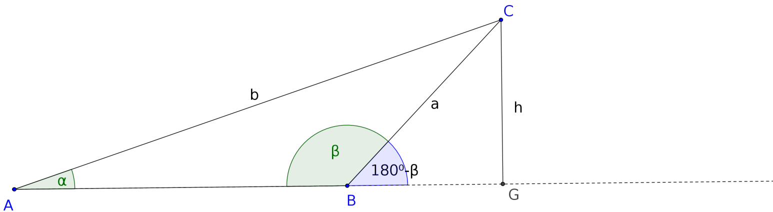
$$b \sin \alpha = h = a \sin \beta$$



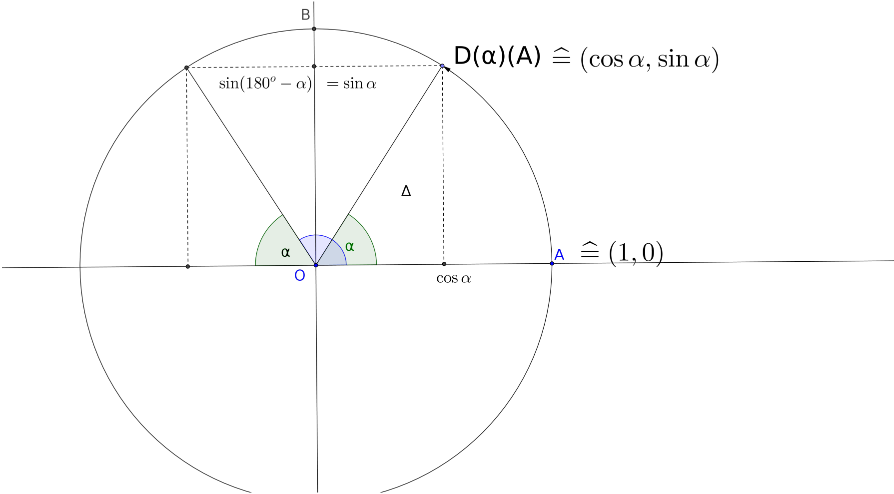
23.Der Sinussatz

Es gilt: $\sin(180^o - \beta) = \sin\beta$

$$b\sin\alpha = h = a\sin(180^o - \beta) = a\sin\beta.$$



24. $\sin(180^o - \alpha)$



Gleichungen für eine affine Abbildung. Kreise im kartesischen Koordinatensystem. Apolloniuskreis die radikale Achse.