Elementare Geometrie Vorlesung 19

Thomas Zink

28.6.2017

1.Gleichungen von Kreisen

Es sei OAB ein kartesisches Koordinatensystem der Ebene E. Für einen Punkt P mit den Koordinaten (x, y) schreiben wir auch einfach (x, y).

1.Gleichungen von Kreisen

Es sei OAB ein kartesisches Koordinatensystem der Ebene E. Für einen Punkt P mit den Koordinaten (x, y) schreiben wir auch einfach (x, y).

Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt (u, v) und dem Radius r. Dann gilt:

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in E \mid (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2\}$$

In der letzten Gleichung kann man die Klammern auflösen:

$$r^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2 = x^2 - 2ux + u^2 + y^2 - 2vy + v^2.$$

Es seien a, b, c, d reelle Zahlen. Es sei $d \neq 0$.
Wir betrachten die Menge $\mathcal{O}$ aller Punkte $(x, y) \in E$, so dass

$$dx^2 + dy^2 + ax + by + c = 0. \tag{1}$$

Wir sagen, dass die Gleichung (1) die Menge $\mathcal{O}$ beschreibt.

Proposition

Die Gleichung (1) beschreibt einen Kreis, einen Punkt oder die leere Menge.
Umgekehrt wird jeder Kreis, durch eine Gleichung der Form (1) beschrieben.

3.Beweis der Proposition:

Beweis: Die Umkehrung folgt aus der letzten Gleichung auf Blatt 1. Wenn man die Gleichung (1) durch d dividiert, bekommt man eine Gleichung, die die gleiche Menge von Punkten beschreibt. Deshalb kann man $d = 1$ annehmen. Man hat

$$0 = x^2 + y^2 + ax + by + c = (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 - ((\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 - c)$$

Die Gleichung beschreibt einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$, wenn $(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 - c =: q > 0$. Sein Radius ist $\sqrt{q}$. Wenn $q = 0$, so beschreibt die Gleichung die Menge $\{(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})\}$ und für $q < 0$ beschreibt sie die leere Menge.

4.Potenz eines Punktes

Es sei $\mathcal{K}$ der Kreis mit dem Mittelpunkt $M \mathrel{\widehat{=}} (u,v)$ und dem Radius r.
Die Potenz eines Punktes P bezüglich $\mathcal{K}$ ist

$$\mathrm{Potenz}_{\mathcal{K}}(P) = (|PM| - r)(|PM| + r) = |PM|^2 - r^2.$$

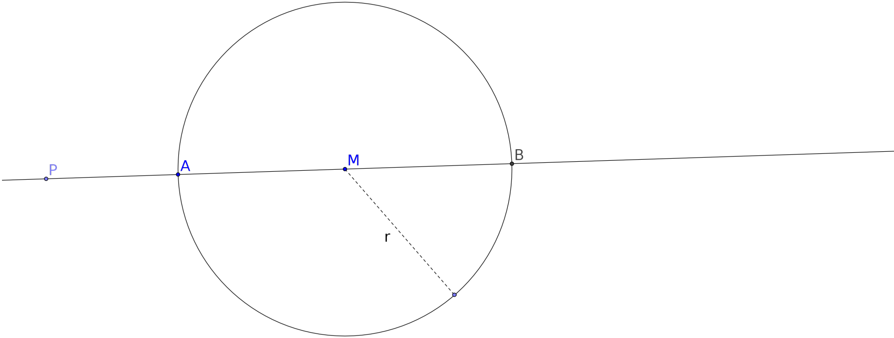
Es sei

$$F(x,y) = (x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2.$$

Proposition

Die Potenz eines Punktes (p,q) bezüglich des Kreises $\mathcal{K}$ ist $F(p,q)$.

$$\text{Potenz}(P) = |PA||PB| = (|PM| - r)(|PM| + r)$$



5.Die radikale Achse

Übungsaufgabe von René Descartes für Kristina von Schweden (1649):

Proposition

Es seien $\mathcal{K}_1$ *und* $\mathcal{K}_2$ *zwei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten. Dann ist die Menge aller Punkte* P*, die bezüglich* $\mathcal{K}_1$ *und* $\mathcal{K}_2$ *die gleiche Potenz haben, eine Gerade. Sie heißt radikale Achse.*

5.Die radikale Achse

Übungsaufgabe von René Descartes für Kristina von Schweden (1649):

Proposition

Es seien $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ zwei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten. Dann ist die Menge aller Punkte P, die bezüglich $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ die gleiche Potenz haben, eine Gerade. Sie heißt radikale Achse.

Beweis: Es sei $M_1 \widehat{=} (u_1, v_1)$ der Mittelpunkt von $\mathcal{K}_1$ und dem Radius r_1 der Radius. Für $\mathcal{K}_2$ sei $M_2 \widehat{=} (u_2, v_2)$ und r_2 der Radius.

6.Die radikale Achse, Beweis

Ein Punkt (x, y) hat die gleiche Potenz zu beiden Kreisen, genau dann wenn

$$(x - u_1)^2 + (y - v_1)^2 - r_1^2 = (x - u_2)^2 + (y - v_2)^2 - r_2^2.$$

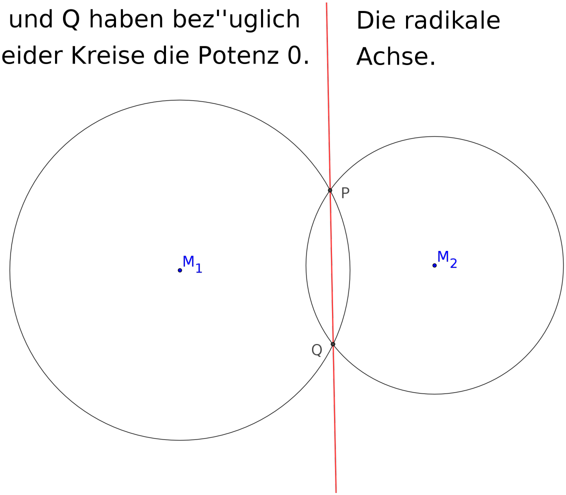
Das ist genau dann erfüllt, wenn die folgende Gleichung gilt:

$$(2u_1 - 2u_2)x + (2v_1 - 2v_2)y + (r_1^2 - r_2^2) = 0$$

Das ist die Gleichung einer Geraden, da nicht beide Koeffizienten $(2u_1 - 2u_2)$ und $(2v_1 - 2v_2)$ null sind.

P und Q haben bez''uglich beider Kreise die Potenz 0.

Die radikale Achse.



7.Die radikale Achse

Die radikale Achse schneidet die Gerade M_1M_2 im rechten Winkel. In der Tat: Wenn wir an M_1M_2 spiegeln, werden beide Kreise auf sich abbgebildet und folglich auch die radikale Achse.

7.Die radikale Achse

Die radikale Achse schneidet die Gerade M_1M_2 im rechten Winkel. In der Tat: Wenn wir an M_1M_2 spiegeln, werden beide Kreise auf sich abbgebildet und folglich auch die radikale Achse.

Es sei $\mathcal{K}_3$ ein weiterer Kreis, dessen Mittelpunkt M_3 von M_1 und M_2 verschieden ist. Dann schneiden sich die drei radikalen Achsen der drei Paare von Kreisen $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$, $(\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3)$ und $(\mathcal{K}_3, \mathcal{K}_1)$ in einem Punkt oder sie sind parallel.

In der Tat: Angenommen die radikalen Achsen der letzten beiden Paare von Kreisen schneiden sich genau in einem Punkt P. Dann gilt:

$$\text{Potenz}_{\mathcal{K}_3}(P) = \text{Potenz}_{\mathcal{K}_2}(P), \quad \text{Potenz}_{\mathcal{K}_3}(P) = \text{Potenz}_{\mathcal{K}_1}(P),$$

Daraus folgt, dass P auf der radikalen Achse von $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ liegt.

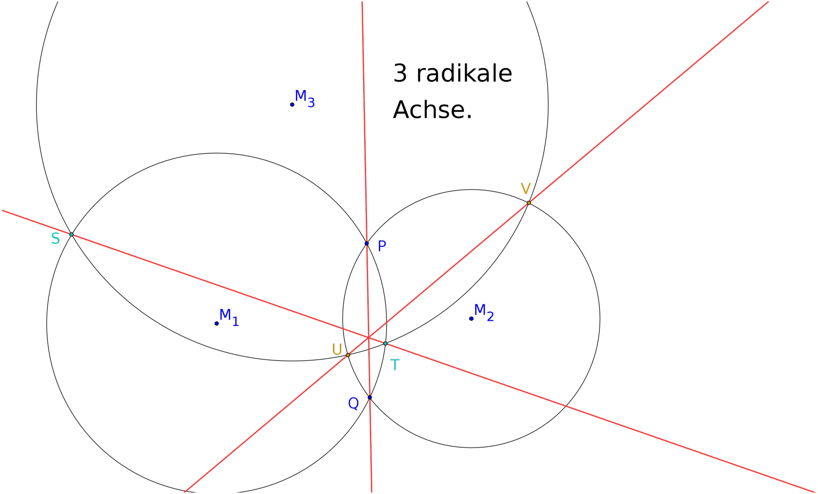
8.Radikale Achsen von 3 Kreisen

In der Tat: Angenommen die radikalen Achsen der letzten beiden Paare von Kreisen schneiden sich genau in einem Punkt P. Dann gilt:

$$\text{Potenz}_{\mathcal{K}_3}(P) = \text{Potenz}_{\mathcal{K}_2}(P), \quad \text{Potenz}_{\mathcal{K}_3}(P) = \text{Potenz}_{\mathcal{K}_1}(P),$$

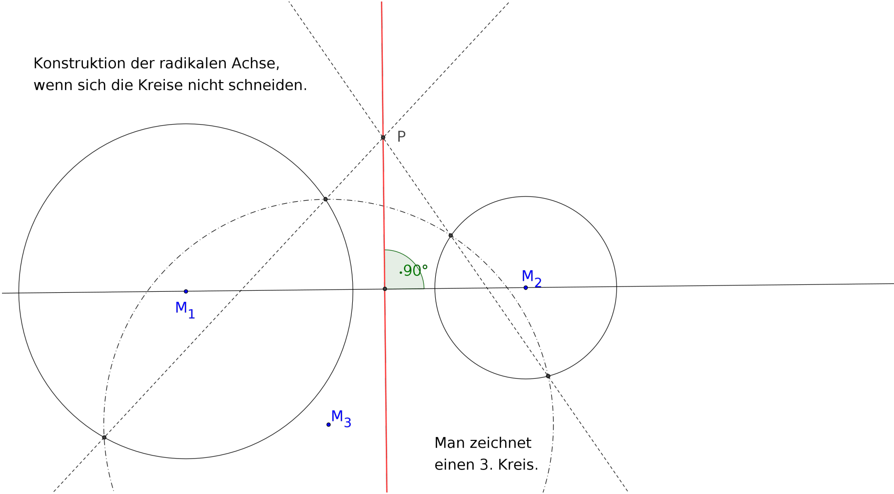
Daraus folgt, dass P auf der radikalen Achse von $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ liegt.

Man kann das benutzen, um die radikale Achse von $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ zu konstruieren, wenn sich die Kreise nicht schneiden.


3 radikale
Achse.
M3
V
S
P
M1
M2
U
T
Q

9. Konstruktion der radikalen Achse

Konstruktion der radikalen Achse,
wenn sich die Kreise nicht schneiden.



Man zeichnet
einen 3. Kreis.

Proposition

Es seien A und B zwei Punkte. Es sei $f > 0$, $f \neq 1$ eine reelle Zahl.
Dann ist die Menge aller Punkte P, so dass

$$|AP| = f|BP| \tag{2}$$

ein Kreis (Apolloniuskreis).

Beweis: Es sei $A \mathrel{\widehat{=}} (a', a'')$ und $B \mathrel{\widehat{=}} (b', b'')$. Es sei $P \mathrel{\widehat{=}} (x, y)$.
Dann sagt die Gleichung (2):

11. Beweis des Satzes von Apollonius

$$(x-a')^2+(y-a'')^2 = f^2((x-b')^2+(y-b'')^2)$$

$$(1-f^2)x^2+(1-f^2)y^2+(2b'f^2-2a')x+$$
$$(2b''f^2-2a'')y+(a'^2+a''^2-f^2b'^2-f^2b''^2)=0$$

Wir können die Proposition Blatt 3 anwenden. Die Gleichung beschreibt einen Kreis, wenn es zwei verschiedene Lösungen gibt. In der Tat, man nimmt die Punkte C und D der Geraden AB, so dass

$$\frac{AC}{BC}=-f, \quad \frac{AD}{BD}=f.$$

12. Apolloniuskreis

Wenn ein Punkt P der Gleichung $|AP| = f|BP|$ genügt, so auch der an AB gespiegelte Punkt P'. Also liegt der Mittelpunkt des Apolloniuskreises auf der Geraden AB.

Also ist der Apolloniuskreis gleich dem Thaleskreis der Strecke $\overline{CD}$.

12. Apolloniuskreis

Wenn ein Punkt P der Gleichung $|AP| = f|BP|$ genügt, so auch der an AB gespiegelte Punkt P'. Also liegt der Mittelpunkt des Apolloniuskreises auf der Geraden AB.

Also ist der Apolloniuskreis gleich dem Thaleskreis der Strecke $\overline{CD}$.

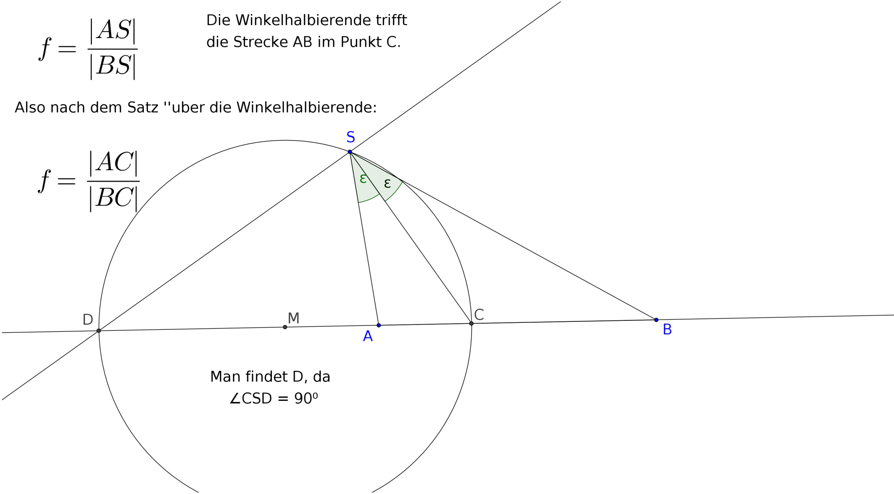
Aufgabe: Es sei S ein Punkt, der nicht auf AB liegt. Man konstruiere einen Apolloniuskreis bezüglich AB, der durch S geht.

$$f = \frac{|AS|}{|BS|}$$

Die Winkelhalbierende trifft
die Strecke AB im Punkt C.

Also nach dem Satz ''uber die Winkelhalbierende:

$$f = \frac{|AC|}{|BC|}$$



Man findet D, da
∠CSD = 90⁰

13.Apolloniuskreis

Proposition

Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Es sei $C \in \overline{AB}$, aber C sei nicht der Mittelpunkt oder einer der Punkte A oder B. Es sei $\mathcal{A}$ der Apolloniuskreis bezüglich der Punkte A und B der durch C geht. Dann gehört ein Punkt S der nicht auf AB liegt genau dann auf $\mathcal{A}$, wenn

$$\angle ASC = \angle BSC. \tag{3}$$

14.Apolloniuskreis

Beweis: Wenn S auf dem Apolloniuskreis liegt, so gilt

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AS|}{|BS|} \tag{4}$$

Nach dem Satz über die Winkelhalbierende geht die Winkelhalbierende des Winkels in S des Dreiecks ASB durch den Punkt C.

14.Apolloniuskreis

Beweis: Wenn S auf dem Apolloniuskreis liegt, so gilt

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AS|}{|BS|} \tag{4}$$

Nach dem Satz über die Winkelhalbierende geht die Winkelhalbierende des Winkels in S des Dreiecks ASB durch den Punkt C.

Wenn umgekehrt für einen Punkt S die Gleichung (3) gilt, so folgt wieder nach dem Satz über die Winkelhalbierende (4), d.h. S liegt auf dem Apolloniuskreis.

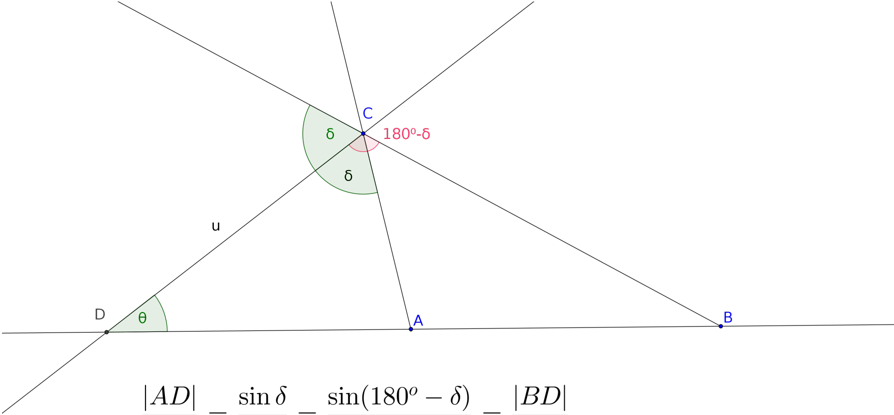
15.Die Winkelhalbierende des Aussenwinkels

Proposition

Es sei ABC ein Dreieck. Es sei u die Winkelhalbierende des Aussenwinkels im Punkte C.
Dann teilt w die gegenüberliegende Strecke im Verhältnis der anliegenden oder ist parallel zu AB. Genauer gilt: Wenn w die Gerade AB im Punkt D schneidet, so hat man

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Beweis:



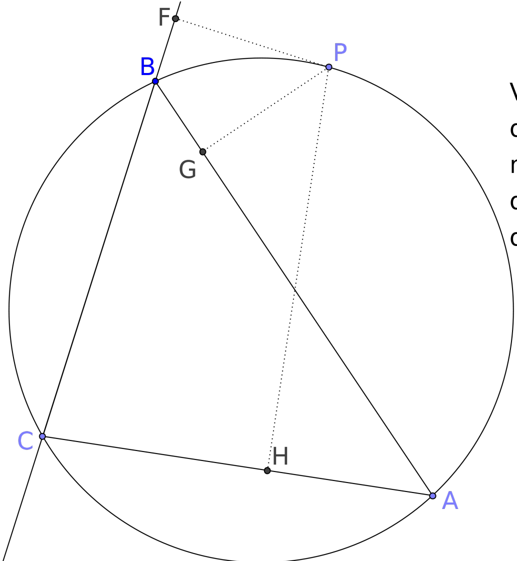
$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{\sin\delta}{\sin\theta} = \frac{\sin(180^o - \delta)}{\sin\theta} = \frac{|BD|}{|BC|}$$

16.Apolloniuskreis

Folgerung

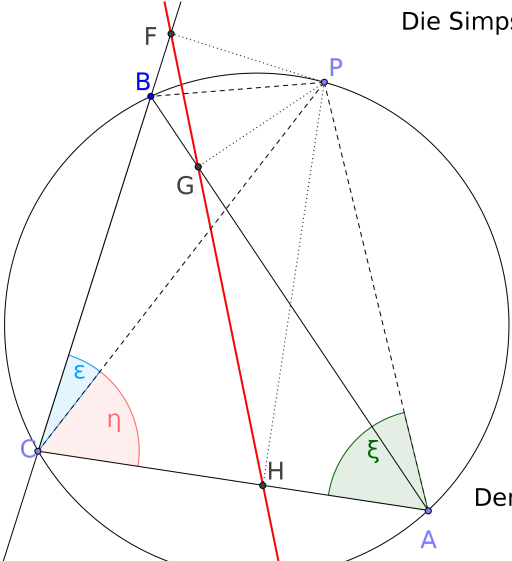
Es sei ASB ein Dreieck. Es sei w die Winkelhalbierende des Winkels in S und es sei u die Winkelhalbierende des Außenwinkels in S. Die Gerade AB möge w im Punkt C schneiden und u im Punkt D.
Dann ist der Apolloniuskreis bezüglich A, B durch den Punkt S gleich dem Thaleskreis über $\overline{CD}$.

17.Die Simpsonsche Gerade



Von einem Punkt
des Umkreises faellt
man die Lote auf
die Seiten
des Dreiecks.

18.Die Simpsonsche Gerade



Die Simpsonsche Gerade.

|HA| = cos ξ |PA|

|HC| = cos η |PC|

|FC| = cos ε |PC|

|FB| = cos ξ |PB|

|GB| = cos η |PB|

|GA| = cos ε |PA|

$$\frac{|HA|}{|HC|}\frac{|FC|}{|FB|}\frac{|GB|}{|GA|} = 1$$

Der Ceva-Menelaus Quotient