Elementare Geometrie Vorlesung 2

Thomas Zink

24.4.2017

Vierecke

Definition

Ein Viereck $ABCD$ *ist ein Streckenzug aus vier Strecken* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$,$\overline{CD}$, $\overline{DA}$ *ohne Selbstüberschneidungen.*

Vierecke

Definition

Ein Viereck $ABCD$ ist ein Streckenzug aus vier Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$,$\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ohne Selbstüberschneidungen.

Ein Spezialfall ist das Parallelogramm. Die Anschauung zeigt

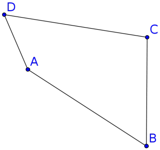
Proposition

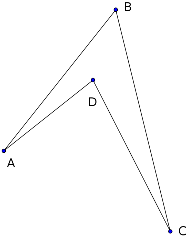
Es seien $ABCD$ vier Punkte. Die Geraden AB und CD seien parallel und die Geraden AD und BC seien parallel.
Dann ist $ABCD$ ein Viereck. Es gilt

$$|AB| = |CD|, \quad |BC| = |DA|.$$

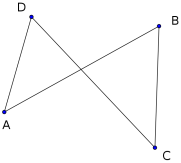
Man nennt $ABCD$ ein Parallelogramm.

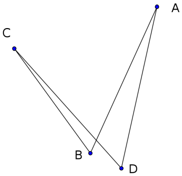
Vierecke

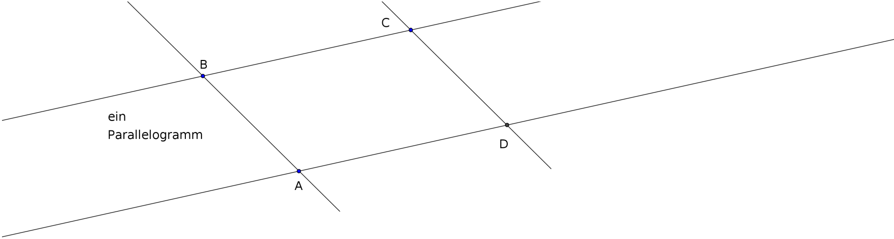


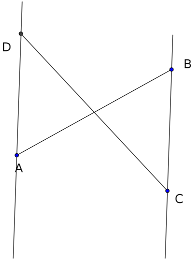


Keine Vierecke









Kein
Parallelogramm

Aber ACBD w''are
ein Parallelogramm

Die Umkehrabbildung

Es sei $f : M \to N$ bijektiv. Dann existiert eine Abbildung $g : N \to M$, so dass

$$f(P) = Q \text{ gdw. } g(Q) = P, \quad P \in M,\ Q \in N.$$

Es gilt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_M\,, \quad f \circ g = \mathrm{id}_N\,.$$

Wir benutzen die Bezeichnung $f^{-1} := g$.

Translationen

Wenn $T : g \to g$ eine Translation ist, so auch T^{-1}.

Proposition

Es seien $S, T : g \to g$ zwei Translationen. Dann ist $T \circ S$ wieder eine Translation.

In der Tat, es seien $A, B \in g$. Dann gilt

$$|(T{\circ}S)(A)\ (T{\circ}S)(B)| = |T(S(A))\ T(S(B))| = |S(A)\ S(B)| = |AB|.$$

Wenn s ein Strahl ist, so ist $S(s)$ ein Strahl, der in die gleiche Richtung zeigt und dann auch $T(S(s))$.

Translation als Kompositum von Parallelprojektionen

Es sei g eine Gerade. Wir wählen eine Parallele h und zwei Projektionsrichtungen ℓ und m, die nicht parallel zu g sind.

Es sei $q : g \to h$ die Parallelprojektion längs ℓ
Es sei $p : h \to g$ die Parallelprojektion längs m

Translation als Kompositum von Parallelprojektionen

Es sei g eine Gerade. Wir wählen eine Parallele h und zwei Projektionsrichtungen ℓ und m, die nicht parallel zu g sind.

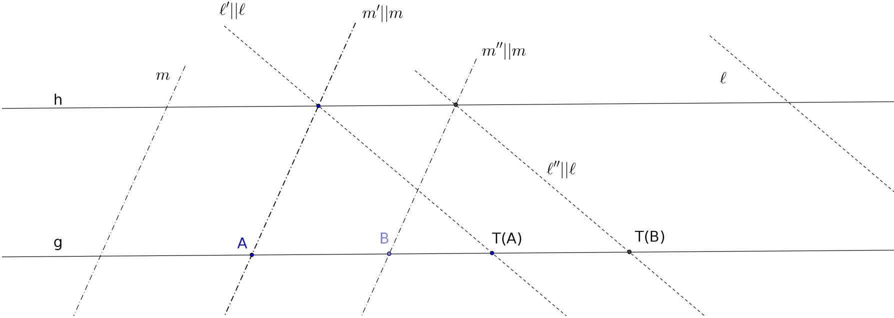
Es sei $q : g \to h$ die Parallelprojektion längs ℓ
Es sei $p : h \to g$ die Parallelprojektion längs m

$$T := p \circ q : g \to g$$

ist eine Translation.

Konstruktion von Translationen T: g → g.

Man w''ahlt eine Gerade h, die parallel
zu g ist und zwei Projektionsrichtungen: ℓ und m.



Die Translation $\overrightarrow{AA'}$

Proposition

Es seien $A, A' \in g$. *Dann gibt es genau eine Translation* $T : g \to g$, *so dass* $T(A) = A'$. *Man schreibt:*

$$T = \overrightarrow{AA'}$$

Die Translation $\overrightarrow{AA'}$

Proposition

Es seien $A, A' \in g$. Dann gibt es genau eine Translation $T : g \to g$, so dass $T(A) = A'$. Man schreibt:

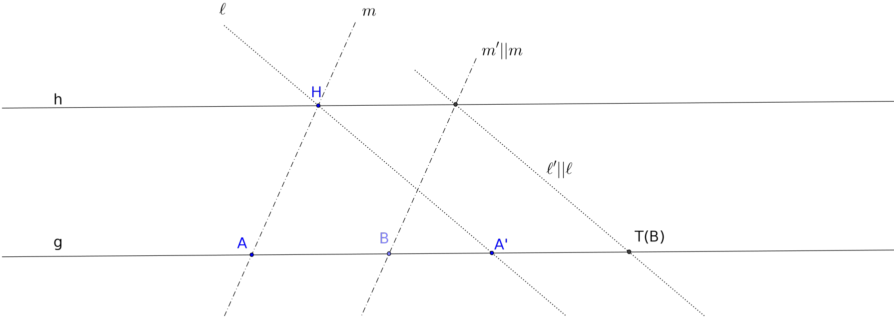
$$T = \overrightarrow{AA'}$$

Konstuktion von T: Man zeichnet ein Parallele h zu g. Man wählt einen Punkt $H \in h$. Es sei $m = HA$ und $\ell = HA'$.

Konstruktion von Translationen $T = \overrightarrow{AA'}$.

Man w''ahlt eine Gerade h, die parallel

zu g ist. Man verbindet A und A' mit einem Punkt von h.



Translation einer Ebene

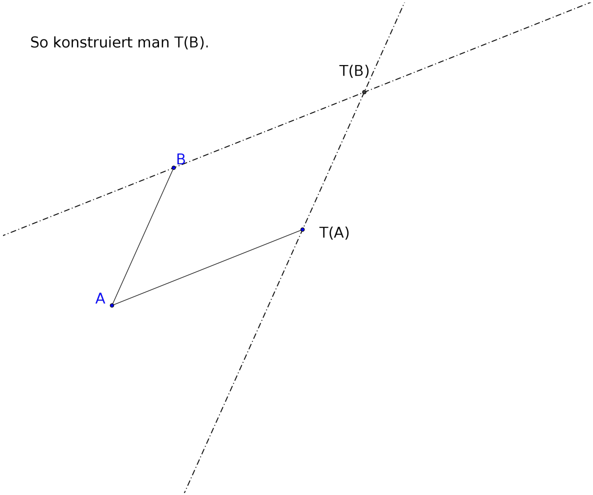
Es sei E eine Ebene.

Definition

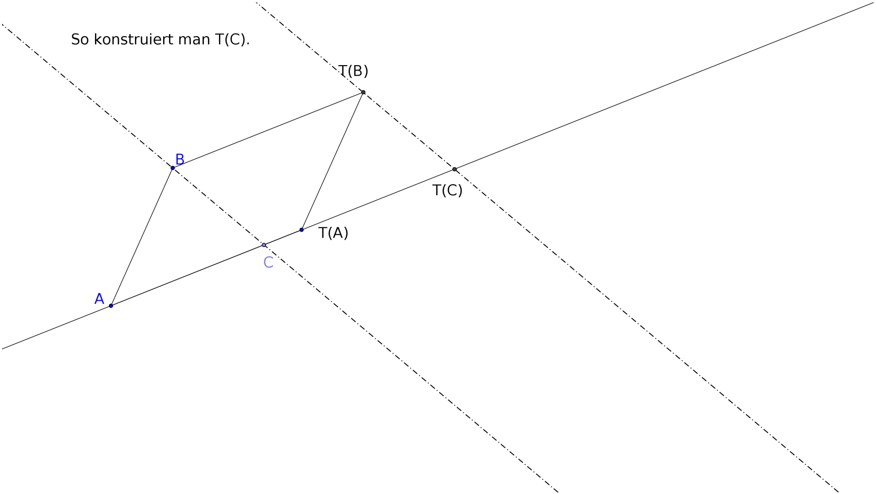
Eine bijektive Abbildung $T : E \to E$ heißt eine Translation, wenn T Geraden auf Geraden abbildet und die folgende Eigenschaft erfüllt ist:
Für jeden Punkt $A \in E$, so dass $T(A) \neq A$ und jeden Punkt B, der nicht auf der Geraden $AT(A)$ liegt, ist

$$AT(A)T(B)B \quad \text{ein Parallelogramm.}$$

So konstruiert man T(B).



So konstruiert man T(C).



Aus der Konstruktion folgt: Es seien $A, A' \in E$, $A \neq A'$. Dann gibt es höchstens eine Translation $T : E \to E$, so dass $T(A) = A'$. Für jeden Punkt $B \in E$ gilt für die Abstände:

$$|BT(B)| = |AA'| \tag{1}$$

Aus der Konstruktion folgt: Es seien $A, A' \in E$, $A \neq A'$. Dann gibt es höchstens eine Translation $T : E \to E$, so dass $T(A) = A'$. Für jeden Punkt $B \in E$ gilt für die Abstände:

$$|BT(B)| = |AA'| \tag{1}$$

$T = \mathrm{id}_E$ ist eine Translation, denn die Voraussetzung $T(A) \neq A$ für die Eigenschaft in der Definition ist nie erfüllt. Folglich ist die Eigenschaft erfüllt.

Der Hauptsatz über Translationen

Proposition

Es seien $A, A' \in E$ zwei Punkte. Dann gibt es genau eine Translation $T : E \to E$, so dass

$$T(A) = A'.$$

Eine Translation mit Fixpunkt ist trivial

Es sei $f : M \to M$ eine Abbildung. Ein Punkt $P \in M$ heißt ein Fixpunkt, wenn

$$f(P) = P.$$

Eine Translation mit Fixpunkt ist trivial

Es sei $f : M \to M$ eine Abbildung. Ein Punkt $P \in M$ heißt ein Fixpunkt, wenn

$$f(P) = P.$$

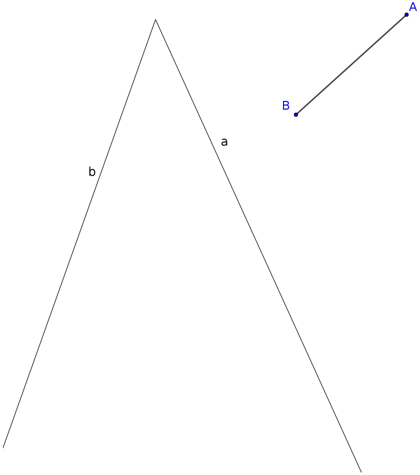
Proposition

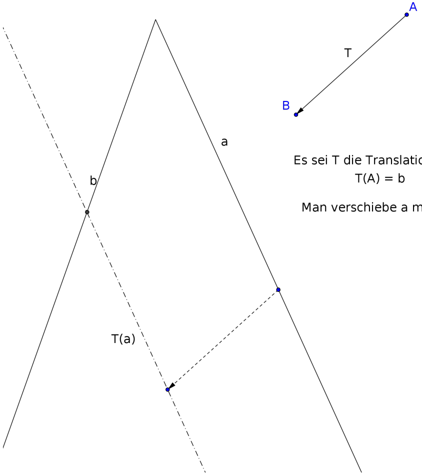
Es sei $T : E \to E$ eine Translation, die einen Fixpunkt besitzt. Dann gilt $T = \mathrm{id}_E$.

Beweis: Es sei $T(A) \neq A$. Dann kann T nach (1) keinen Fixpunkt haben. Also gilt $T(A) = A = \mathrm{id}_E(A)$.

Eine Strecke zwischen zwei Geraden einfügen

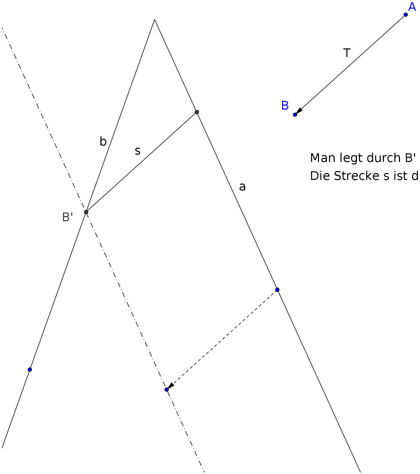
Aufgabe: Es seien a und b zwei Geraden. Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Man zeichne eine zu $\overline{AB}$ parallele Strecke der gleichen Länge, die die beiden Geraden verbindet.


A
B
a
b



Es sei T die Translation, so dass
T(A) = b

Man verschiebe a mit T.

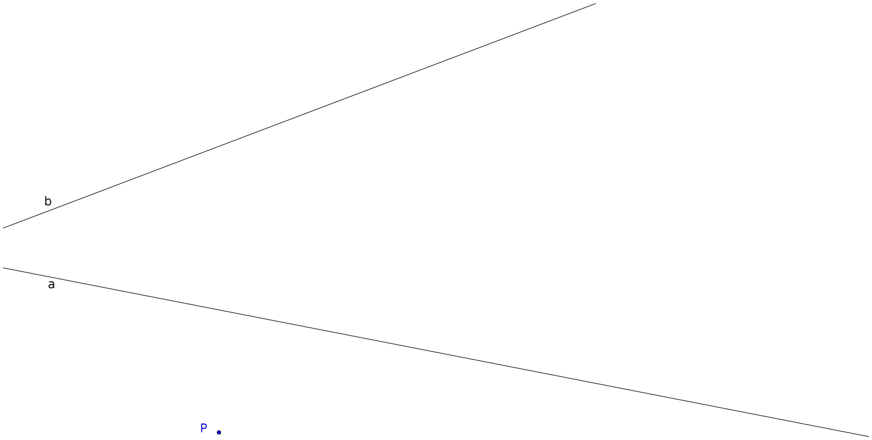


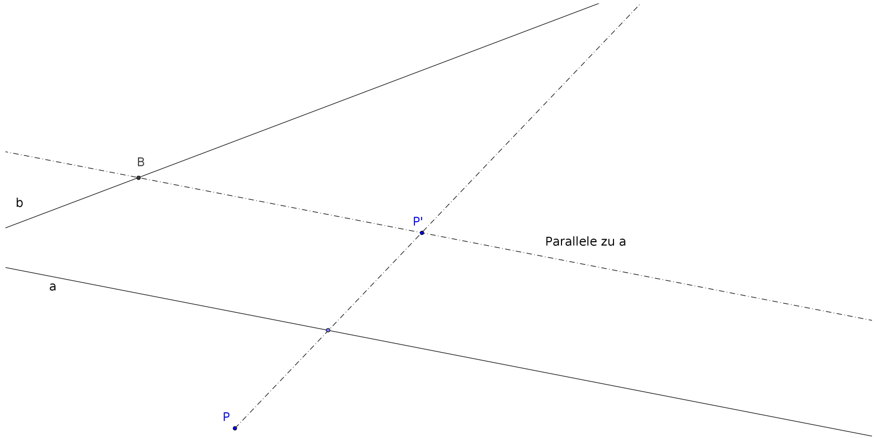
Man legt durch B' eine Parallele zu AB.
Die Strecke s ist die L''osung.

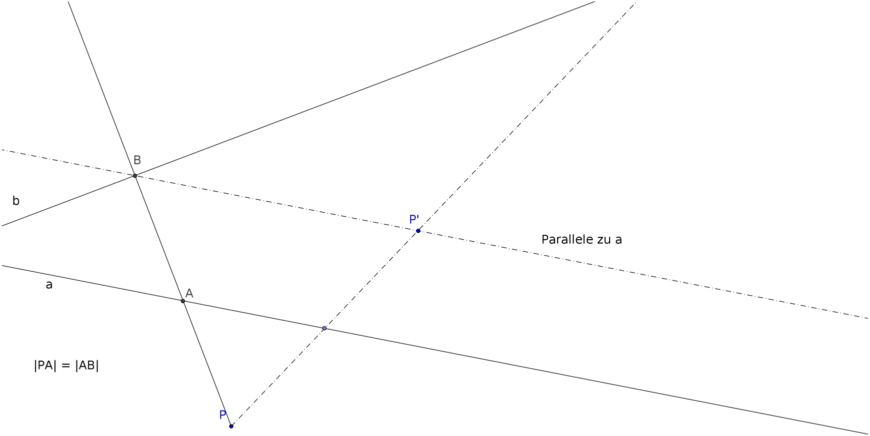
gleiche Abschnitte

Aufgabe: Es seien a und b zwei Geraden. Es sei P ein Punkt. Man lege durch P eine Gerade g mit folgender Eigenschaft:
Wenn A der Durchschnitt von g mit a ist und wenn B der Durchschnitt von g mit b ist, so gilt:

$$|PA| = |AB|.$$


b
a
P

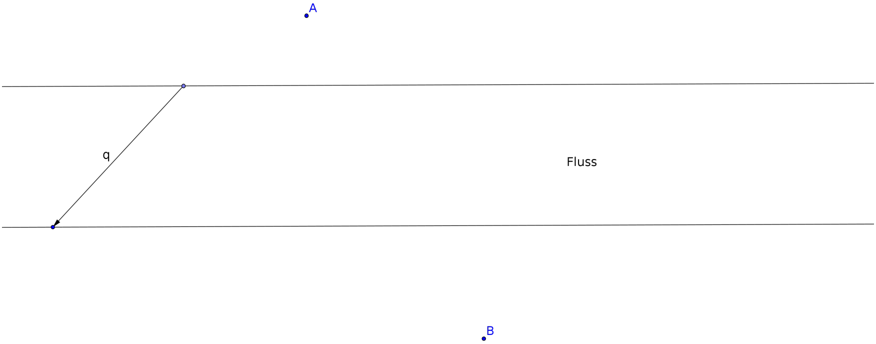

B
b
P'
Parallele zu a
a
P


B
b
P'
Parallele zu a
a
A
|PA| = |AB|
P

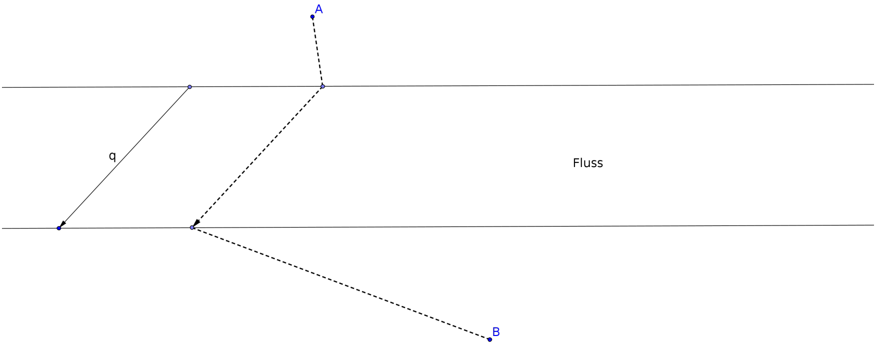
Aufgabe: Flussüberquerung

Zwischen den Punkten A und B liegt ein Fluss. Man möchte von A nach B, so dass die Strecke, die man auf dem Land zurücklegt möglichst kurz ist.
Bei der Überquerung des Flusses bewegt man sich wegen der Strömung auf einer Geraden, die parallel zu einer gegebenen Gerade q ist.
Welchen Weg muss man nehmen?

Wie kommt man von A nach B, so dass der
Weg auf dem Land moeglichst kurz ist?

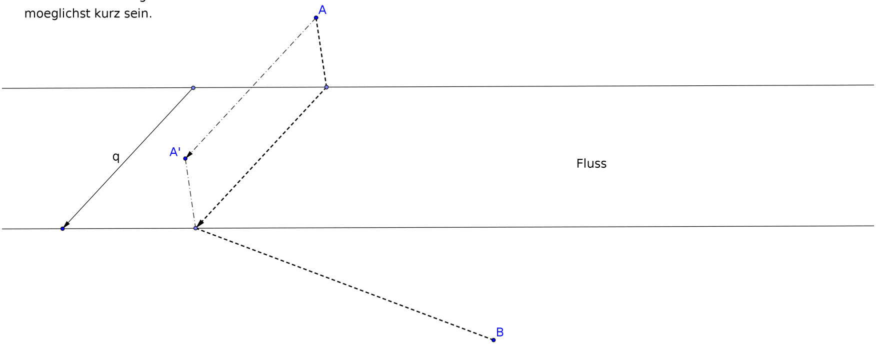


Ein Beispielweg.

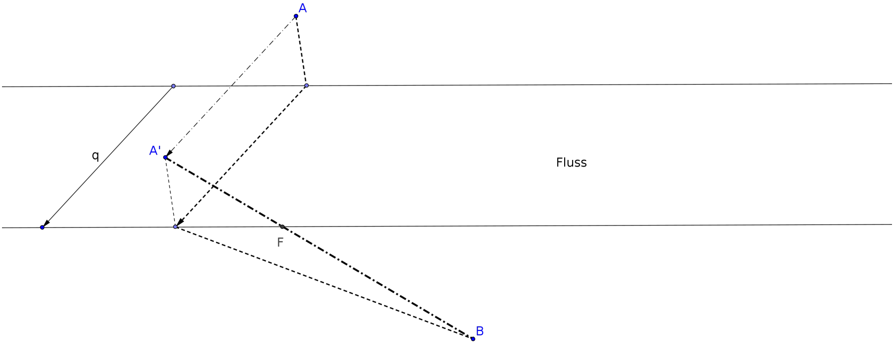


Wir verschieben den Punkt A und das obere Flussufer mit der Translation q.

Dann muss der Weg von A' nach B moeglichst kurz sein.



Den kuerzesten Weg erhalten wir, wenn
wir A' und B durch eine Strecke verbinden.



Der Landweg ist am kuerzesten, wenn
wir im Punkt F am anderen Ufer landen.