Elementare Geometrie   Wiederholung 5

Thomas Zink

17.5.2017

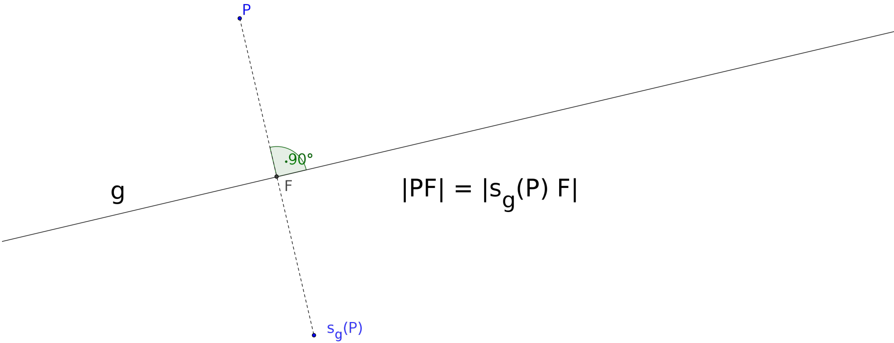
1.Die Spieglung

Es sei E eine Ebene und $g \subset E$ eine Gerade. Es sei $s_g : E \to E$ die Spieglung an g. Dann gilt:

$$s_g^2 := s_g \circ s_g = \mathrm{id}_E \,.$$

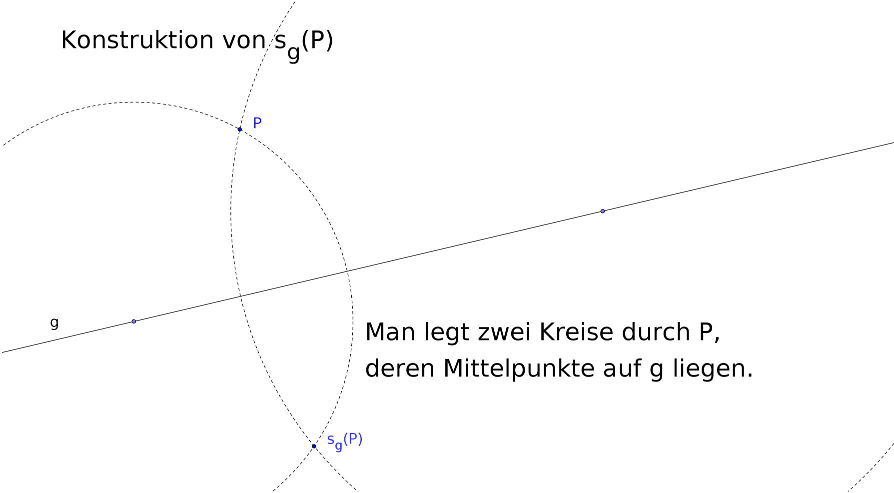
$$\begin{aligned} s_g(A) &= A, && A \in g, \\ |s_g(P)s_g(Q)| &= |PQ|, && P, Q \in E. \end{aligned}$$

Die Spieglung s_g an einer Geraden g.



$|PF| = |s_g(P)\,F|$

Konstruktion von $s_g(P)$



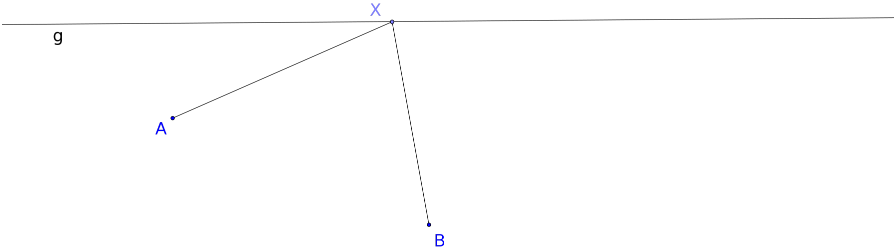
Man legt zwei Kreise durch P, deren Mittelpunkte auf g liegen.

2. Ein kürzester Weg

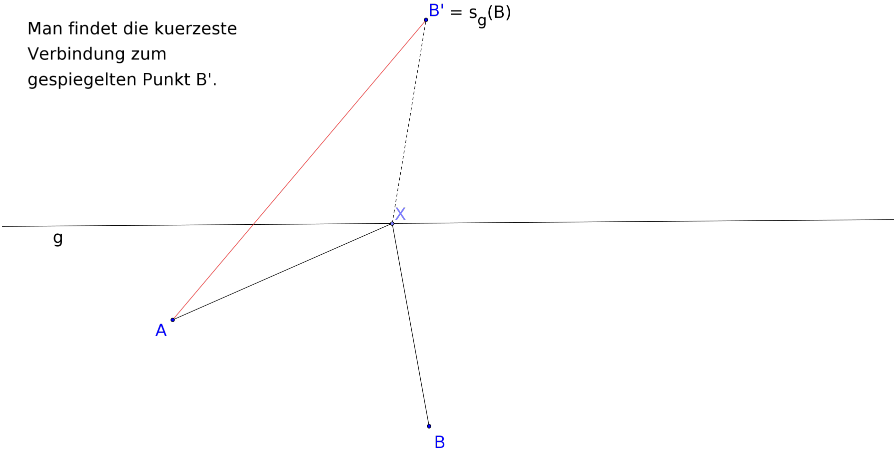
Aufgabe: Es seien A, B zwei Punkte, die auf der gleichen Seite von g liegen. . Man finde einen Punkt $X \in g$, so dass

$$|AX| + |XB| = \text{Minimum.}$$

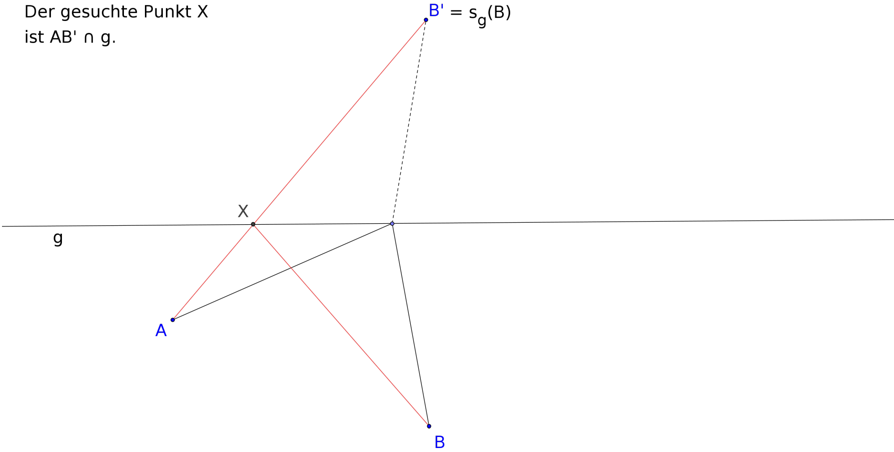
Wir raten einen Punkt X.



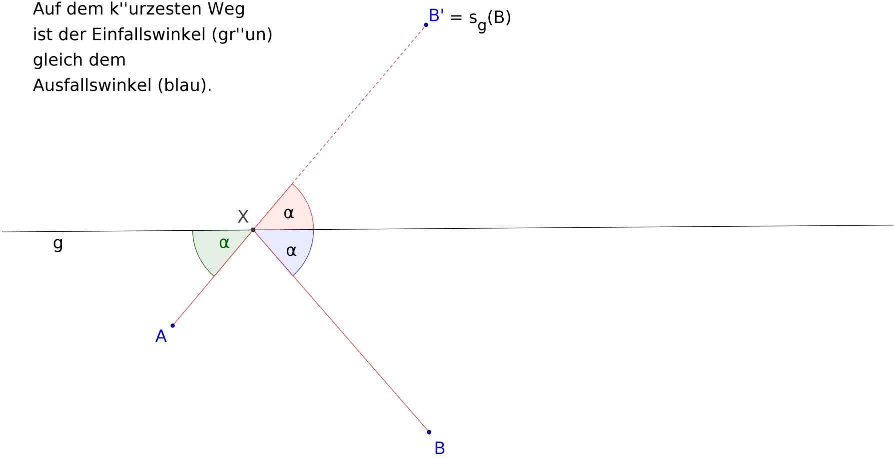
Man findet die kuerzeste
Verbindung zum
gespiegelten Punkt B'.



Der gesuchte Punkt X
ist AB' ∩ g.



Auf dem k''urzesten Weg
ist der Einfallswinkel (gr''un)
gleich dem
Ausfallswinkel (blau).



3.Billiard

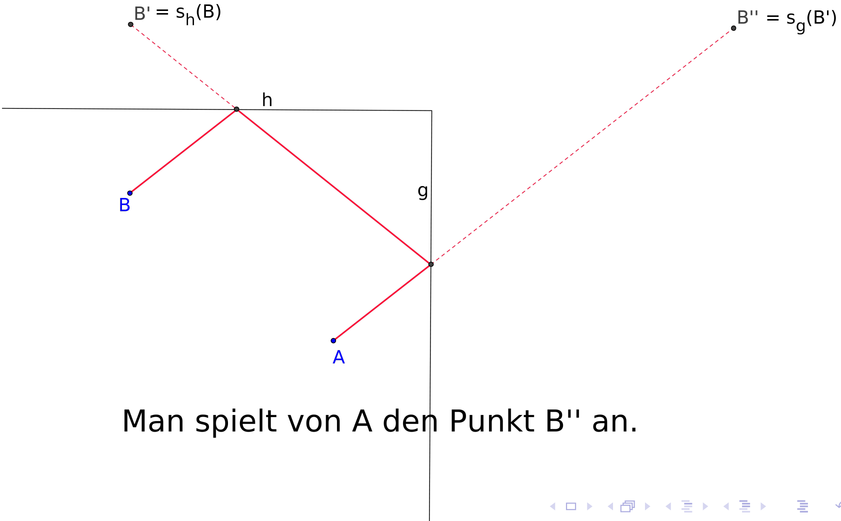
Beim Billiardspiel nimmt die Kugel den kürzesten Weg. Angenommen wir wollen mit der Kugel A über die Bande g die Kugel B anspielen. Dann müssen wir auf das Spiegelbild $s_g(B)$ der Kugel B zielen.

3.Billiard

Beim Billiardspiel nimmt die Kugel den kürzesten Weg. Angenommen wir wollen mit der Kugel A über die Bande g die Kugel B anspielen. Dann müssen wir auf das Spiegelbild $s_g(B)$ der Kugel B zielen.

Man kann auch Billiard über zwei Banden spielen. Man will mit der Kugel A die Kugel B über die Banden g und dann h anspielen.

Der k''urzeste Weg von A nach B ''uber g und h.
Das ist der Weg einer Billiardkugel.

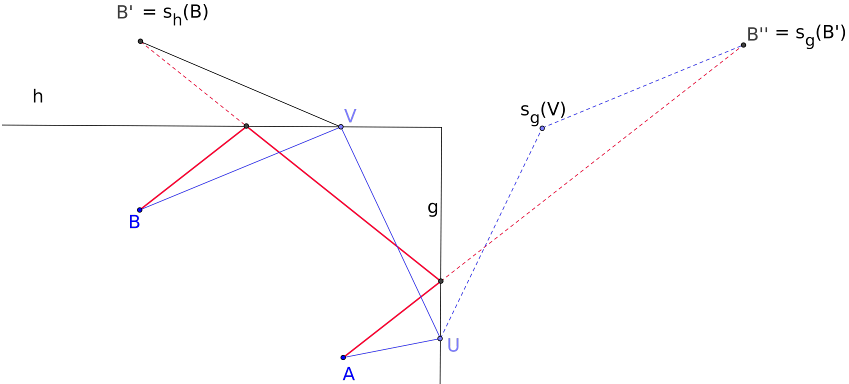


Man spielt von A den Punkt B'' an.

4.Erklärung zum Billiard

Wenn man den Punkt B'' anspielt, trifft die Kugel auf die Gerade g und läuft dann zum Spiegelbild B' von B'' bezüglich der Gerade g, da bei der Reflektion der Einfalls- gleich dem Ausfallswinkel ist. Wenn die Kugel dann die Bande h trifft, so läuft sie zum Spiegelbild von B' bezüglich der Gerade h. Das ist der Punkt B.

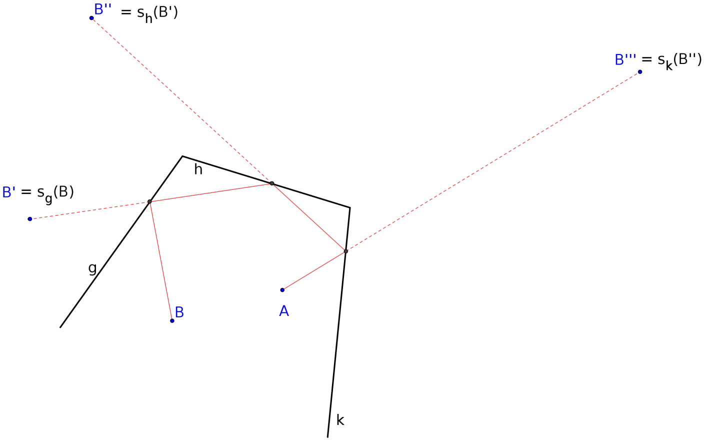
Jeder andere Weg von A nach B ueber g und h ist l''anger als der rote.



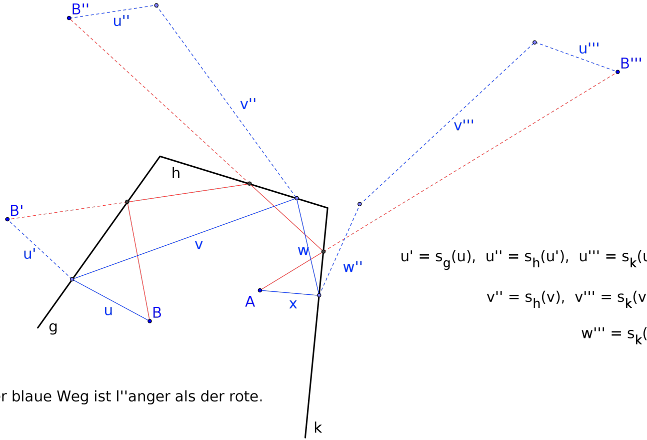
L''ange des blauen Wegs =

$|AU| + |U\, s_g(V)| + |s_g(V)B''| \geq |AB''| =$

L''ange des roten Wegs.



B'' = s_h(B')
B''' = s_k(B'')
h
B' = s_g(B)
g
B
A
k



$u' = s_g(u)$, $u'' = s_h(u')$, $u''' = s_k(u'')$.

$v'' = s_h(v)$, $v''' = s_k(v'')$

$w''' = s_k(w)$

Der blaue Weg ist l''anger als der rote.

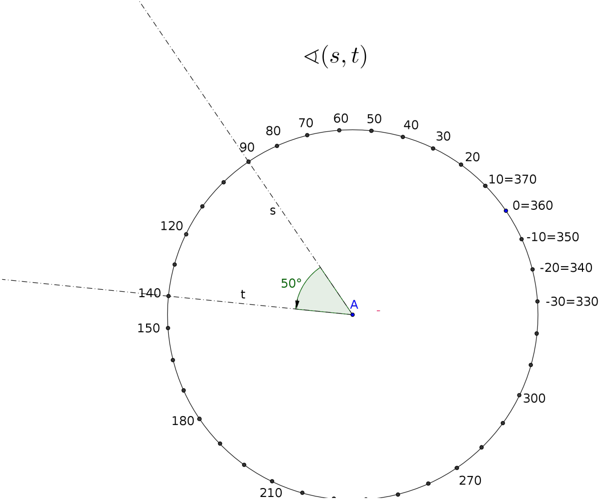
5.Drehwinkel

Es seien s und t zwei Strahlen. Dann haben wir den Drehwinkel definiert:

$$\sphericalangle(s,t).$$

Das ist der Winkel, um s nach t zu drehen.

$$\sphericalangle(s,t)$$



Es sei $D : E \to E$ eine Bewegung. Wir wählen eine beliebigen Strahl s. Dann nennt man

$$\sphericalangle(s, Ds)$$

den Drehwinkel von D. (V9,23).

Wir betrachten zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt S schneiden. Es sei s_g die Spieglung an g und s_h die Spieglung an h. Die Bewegung $s_h \circ s_g$ hat den Fixpunkt S und ist folglich eine Drehung um S.

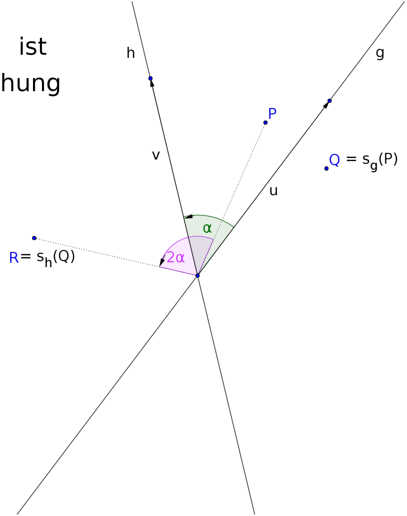
Wir betrachten zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt S schneiden. Es sei s_g die Spieglung an g und s_h die Spieglung an h. Die Bewegung $s_h \circ s_g$ hat den Fixpunkt S und ist folglich eine Drehung um S.

Es gilt:

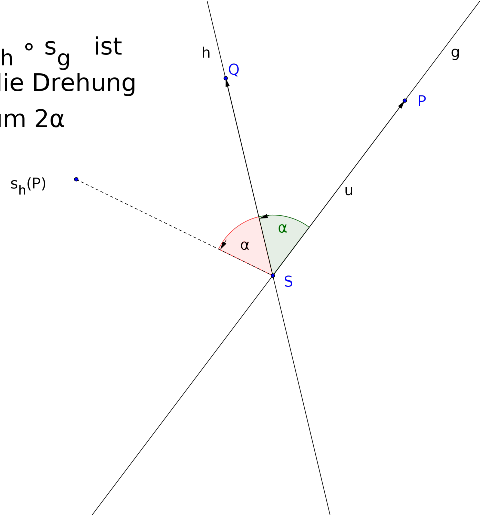
$$\vartheta(s_h \circ s_g) = 2\sphericalangle(g, h).$$

(siehe V9,3 für die Definition der rechten Seite.)

$s_h \circ s_g$ ist die Drehung um 2α



$s_h \circ s_g$ ist
die Drehung
um 2α



7.Übung 5,1

5,1) Es sei ein Billiard mit zwei Banden g und h gegeben. Man stoße eine Kugel P in eine beliebige Richtung u (d.h. ein Strahl), so dass sie gegen die Bande g prallt und dann gegen die Bande h. Danach setzt die Kugel ihren Weg in Richtung v fort.
Man beweise, dass

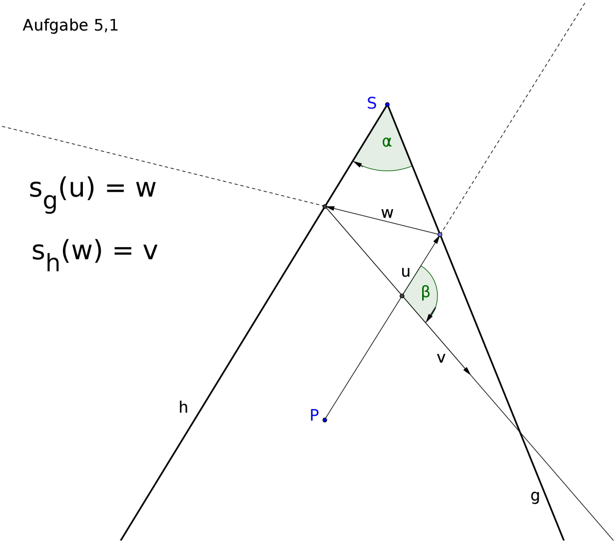
$$\sphericalangle(u,v) = 2\sphericalangle(g,h)$$

Man zeichene ein Beispiel und messe die Winkel aus.

Aufgabe 5,1

$s_g(u) = w$

$s_h(w) = v$



8.Billiard Übung

Lösung: Die Kugel rollt auf dem Strahl u gegen die Bande g. Sie wird abgelenkt und rollt auf dem Strahl $w = s_g(u)$ bis zur Bande h. Sie wird wieder abgelenkt und rollt weiter auf dem Strahl $v = s_h(w) = (s_h \circ s_g)(u)$. Also gilt

$$\sphericalangle(u, v) = \vartheta(s_h \circ s_g) = 2\sphericalangle(g, h).$$

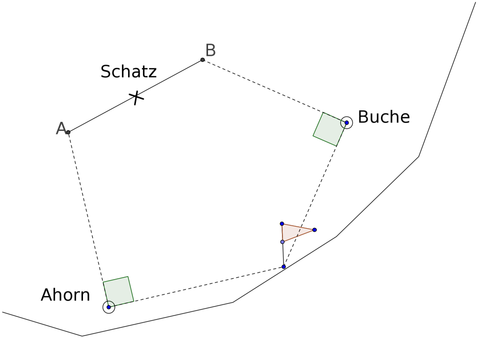
9.Aufgabe: Schatzsuche

1) Für einen Ausflug hat ein Lehrer ein Schatzsuchespiel vorbereitet:
"Fahrt mit dem Boot zur Insel. Am Ufer findet ihr ein rotes Fähnchen, dort steigt ihr aus. Es gibt auf der Insel einen Ahornbaum und eine Buche.

10.Aufgabe: Schatzsuche

Zählt die Schritte vom Fähnchen bis zum Ahornbaum, dort biegt ihr im rechten Winkel nach rechts ab, und geht nun die gleiche Anzahl von Schritten geradeaus. Markiert diesen Punkt. Geht zurück zum Fähnchen und zählt nun die Schritte bis zur Buche, diesmal biegt ihr dort im rechten Winkel nach links ab und geht wieder die gleiche Anzahl von Schritten geradeaus. Markiert auch diesen Punkt.
Der Schatz befindet sich genau in der Mitte zwischen den beiden markierten Punkten."

11.Schatzkarte



Als die Schüler auf der Insel ankommen, ist das rote Fähnchen nicht mehr da. Wieso können sie den Schatz trotzdem finden? Antwort: Es sei D_{Ahorn} die Drehung um -90^o um den Ahornbaum. Dann ist $D_{Ahorn}(A) =$ Fähnchen. Es sei D_{Buche} die Drehung um -90^o um die Buche. Dann gilt $D_{Buche}(\text{Fähnchen}) = B$. Also gilt

$$(D_{Buche} \circ D_{Ahorn})(A) = B$$

Aber $D_{Buche} \circ D_{Ahorn}$ ist eine Drehung um $(-90^o) + (-90^o) = 180^o$. Also ist der Fixpunkt dieser Drehung der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Dort liegt der Schatz.

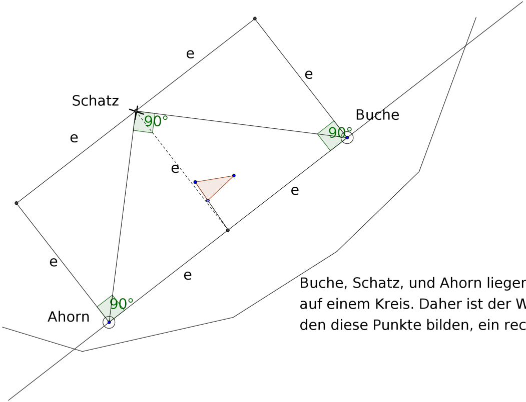
12. Schatz ist im Fixpunkt

Also ist der Schatz im Fixpunkt der Punktspieglung (=Drehung um 180^o) $D_{Buche} \circ D_{Ahorn}$. Dieser Fixpunkt hängt nicht von der Lage des Fähnchens ab.

Übung: Man beweise, dass

$$\angle\text{Buche Schatz Ahorn} = 90^o.$$

Beweis: Dazu stellt man das Fähnchen in den Mittelpunkt der Strecke "Buche Ahorn".



Buche, Schatz, und Ahorn liegen
auf einem Kreis. Daher ist der Winkel,
den diese Punkte bilden, ein rechter.