Elementare Geometrie Vorlesung 3

Thomas Zink

26.4.2017

Proposition

Es seien $A, A' \in E$ zwei Punkte. Dann gibt es genau eine Translation $T : E \to E$, so dass

$$T(A) = A'.$$

2.Eine Translation mit Fixpunkt ist trivial

Es sei $f : M \to M$ eine Abbildung. Ein Punkt $P \in M$ heißt ein Fixpunkt, wenn

$$f(P) = P.$$

2.Eine Translation mit Fixpunkt ist trivial

Es sei $f : M \to M$ eine Abbildung. Ein Punkt $P \in M$ heißt ein Fixpunkt, wenn

$$f(P) = P.$$

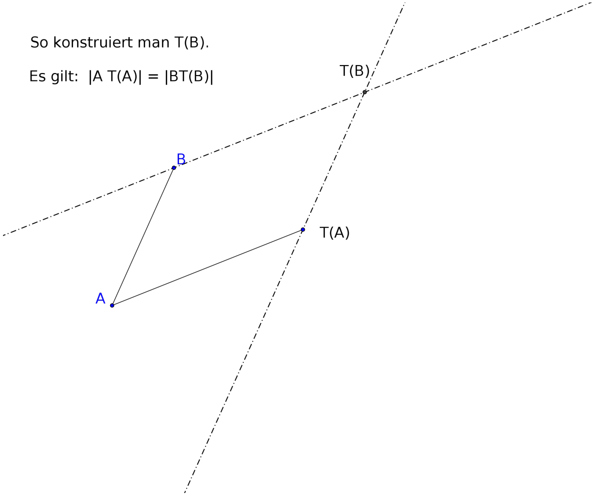
Proposition

Es sei $T : E \to E$ eine Translation, die einen Fixpunkt besitzt. Dann gilt $T = \mathrm{id}_E$.

Beweis: Es sei $T(A) \neq A$. Dann kann T keinen Fixpunkt haben, da $|AT(A)| = |BT(B)|$ für alle $B \in E$. Also gilt $T(A) = A$ für alle $A \in E$.

So konstruiert man T(B).

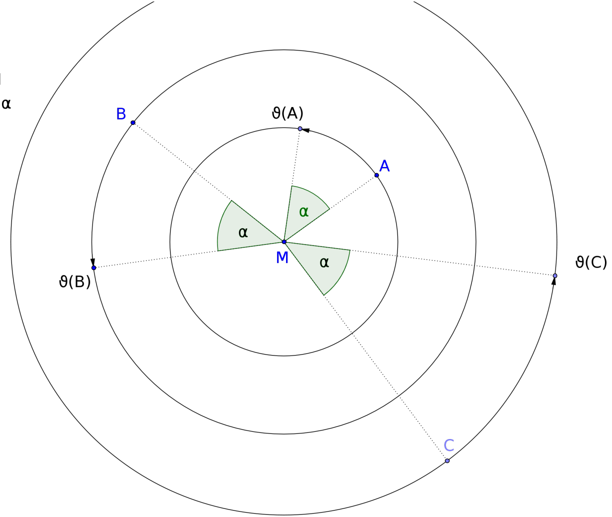
Es gilt: |A T(A)| = |BT(B)|



3.Eine Drehung $\vartheta : E \to E$

Drehung ϑ
um den Punkt M
und den Winkel α

ϑ(M) = M

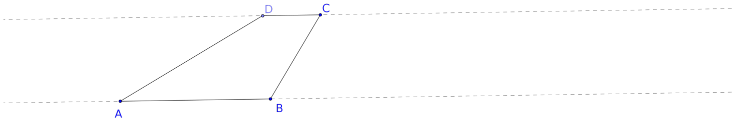


4.Das Trapez

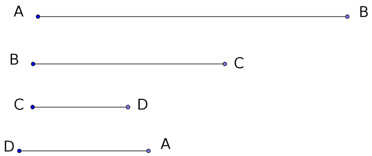
Ein Viereck $ABCD$ heißt ein Trapez, wenn gilt

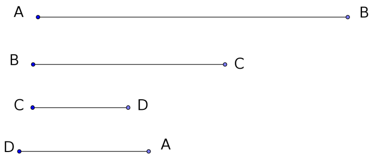
$$AB||CD.$$

D.h. die beiden Geraden sind parallel.

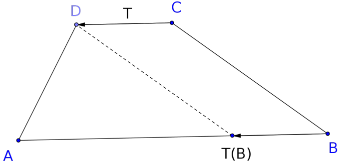


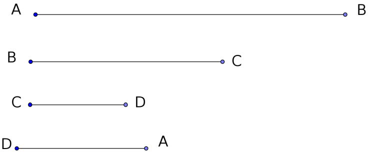
5.Konstruiere ein Trapez aus $|AB|, |BC|, |CD|, |DA|$



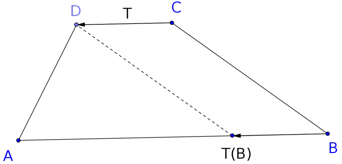


Es sei T die Translation
T(C) = D





Es sei T die Translation
T(C) = D



Man muss nur noch das Dreieck A T(B) D konstruieren.

Die L''angen der Seiten dieses Dreiecks sind bekannt.

Proposition

Es sei $\overline{AB}$ *eine Sehne in einem Kreis mit dem Mittelpunkt M. Es sei*
S *ein Punkt auf dem Kreisumfang, der auf der gleichen Seite von* AB *liegt wie* M.
Dann gilt für die Winkel

$$2\angle ASB = \angle AMB.$$

Proposition

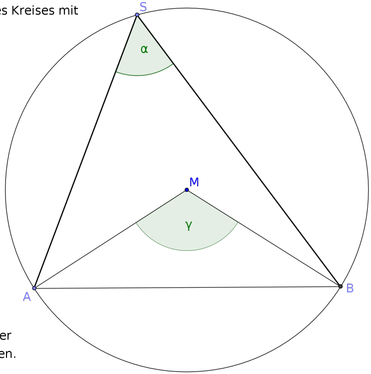
Es sei $\overline{AB}$ eine Sehne in einem Kreis mit dem Mittelpunkt M. Es sei
S ein Punkt auf dem Kreisumfang, der auf der gleichen Seite von AB liegt wie M.
Dann gilt für die Winkel

$$2\angle ASB = \angle AMB.$$

In der folgenden Zeichnung ist

$$\alpha = \angle ASB, \quad \gamma = \angle AMB.$$

Der Zentriwinkel α und der Peripheriewinkel γ
''uber einer Sehne AB eines Kreises mit
dem Mittelpunkt M.



Satz: Der Punkt S und der
Mittelpunkt m''ogen auf der
gleichen Seite von AB liegen.
Dann gilt:

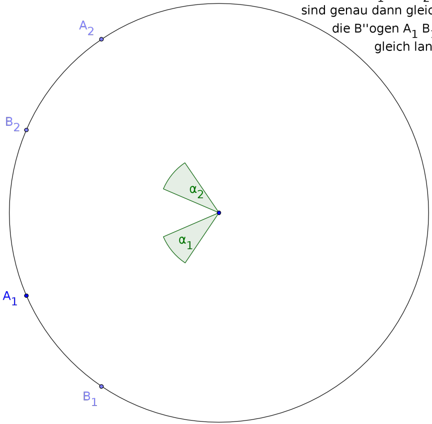
$$\gamma = 2\alpha$$

7. Beweis des Satzes vom Peripheriewinkel

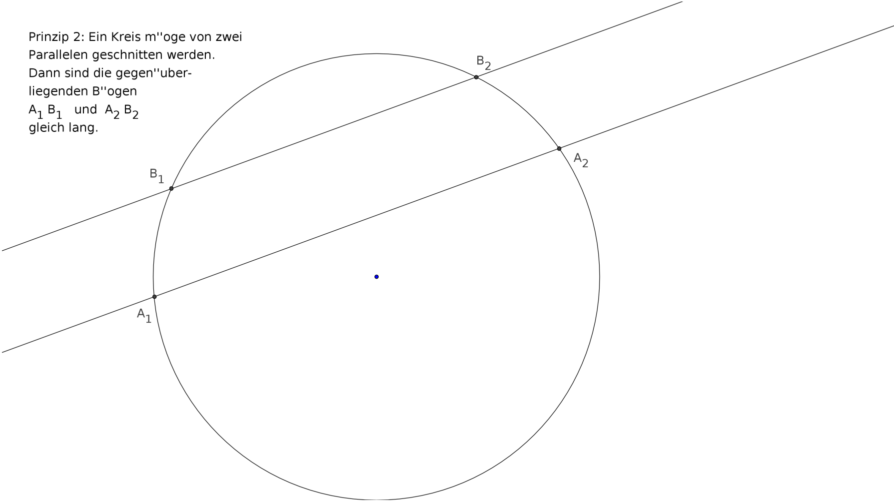
Wir vergegenwärtigen uns zwei einfache Prinzipien:

Prinzip 1

Die Winkel α_1 und α_2
sind genau dann gleich gross, wenn
die B''ogen A_1 B_1 und A_2 B_2
gleich lang sind.



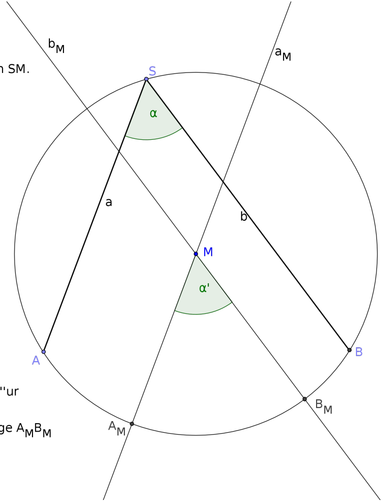
Prinzip 2: Ein Kreis m''oge von zwei Parallelen geschnitten werden. Dann sind die gegen''uber-liegenden B''ogen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ gleich lang.



8. Fortsetzung des Beweises

Wir wenden auf den Winkel α die Translation $\overrightarrow{SM}$ an
Dabei ändert der Winkel seine Größe nicht.

α' ensteht aus α durch SM.
Daher gilt $\alpha = \alpha'$.



Deshalb muss man f''ur
die B''ogen zeigen:
L''ange AB = 2 L''ange $A_M B_M$

10. Fortsetzung des Beweises

Wir können jetzt die Winkel vergessen und brauchen uns nur noch auf die Länge der Bögen zu konzentrieren.

10. Fortsetzung des Beweises

Wir können jetzt die Winkel vergessen und brauchen uns nur noch auf die Länge der Bögen zu konzentrieren.

Wir schreiben ab jetzt $\ell(AB)$ für die Länge des Bogens AB.

10. Fortsetzung des Beweises

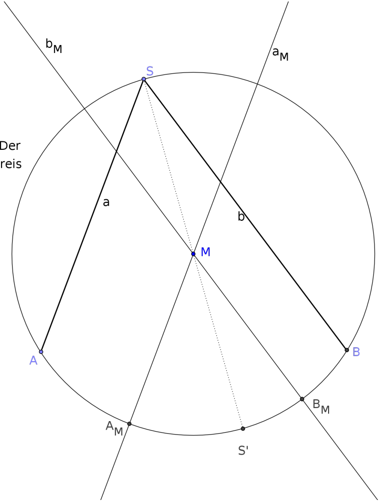
Wir können jetzt die Winkel vergessen und brauchen uns nur noch auf die Länge der Bögen zu konzentrieren.

Wir schreiben ab jetzt $\ell(AB)$ für die Länge des Bogens AB.

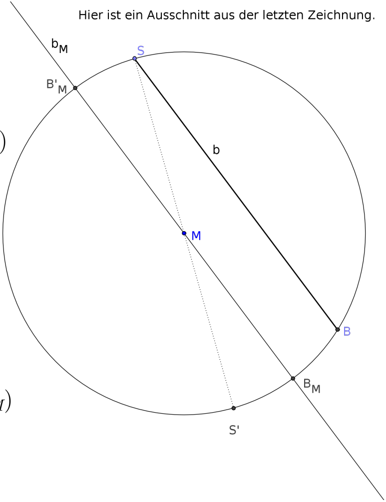
Wir müssen beweisen:

$$\ell(AB) = 2\ell(A_M B_M).$$

Wir verbinden S mit M. Der Schnittpunkt mit dem Kreis ist die Antipode S'.



Hier ist ein Ausschnitt aus der letzten Zeichnung.



$$\ell(S'B_M) = \ell(SB'_M)$$

Die Winkel liegen
sich gegen''uber.

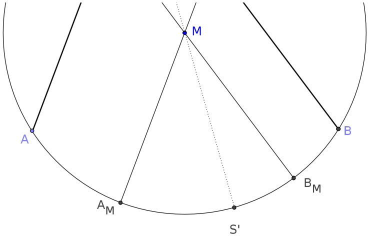
Nach Prinzip 2:

$$\ell(SB'_M) = \ell(BB_M)$$

Also:

$$\ell(S'B_M) = \ell(BB_M)$$

10. Das Ende des Beweises



$$\ell(AS') = 2\ell(A_M S') \qquad \ell(S'B) = 2\ell(S'B_M)$$

$$\ell(AB) = \ell(AS') + \ell(S'B) = 2\ell(A_M S') + 2\ell(S'B_M) = 2\ell(A_M B_M).$$

11.Konstruktion einer Translation T, sd. $T(A) = A'$

Es seien A und A' zwei Punkte einer Ebener E. Wir konstruieren eine Parallelprojektion $T : E \to E$, so dass $T(A) = A'$.

11.Konstruktion einer Translation T, sd. $T(A) = A'$

Es seien A und A' zwei Punkte einer Ebener E. Wir konstruieren eine Parallelprojektion $T : E \to E$, so dass $T(A) = A'$.

Wir wählen eine Gerade ℓ durch A nicht parallel zu E ist und eine weitere Ebene F, die parallel zu E ist.

11.Konstruktion einer Translation T, sd. $T(A) = A'$

Es seien A und A' zwei Punkte einer Ebener E. Wir konstruieren eine Parallelprojektion $T : E \to E$, so dass $T(A) = A'$.

Wir wählen eine Gerade ℓ durch A nicht parallel zu E ist und eine weitere Ebene F, die parallel zu E ist.

Es sei $P = \ell \cap F$ und $m = PA'$. Es sei $p : E \to F$ die Parallelprojktion längs ℓ und $q : F \to E$ die Parallelprojektion längs m. Dann ist

$$T = q \circ p$$

die gewünschte Projektion.

Eine Translation
T: E → E als
Kompositum zweier
Parallelprojektionen.

Man sieht, dass
A T(A) T(B) B ein
Parallelogramm ist.