Elementare Geometrie Vorlesung 4

Thomas Zink

3.5.2017

1. Der Drehwinkel zwischen zwei Strahlen

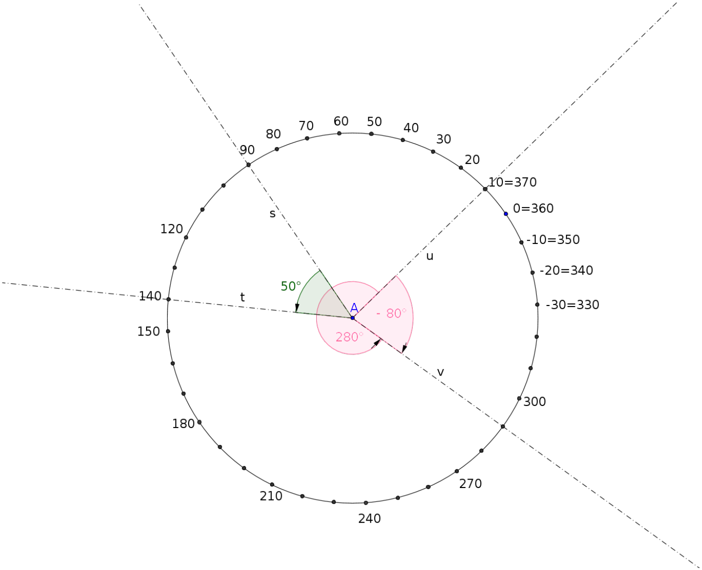
Es seien s und t zwei Strahlen in der Ebene mit dem gleichen Anfangspunkt A. Man legt ein Ziffernblatt um A, das in 360 gleiche Teile eingeteilt ist. Die Ziffern mögen entgegengesetzt dem Uhzeigersinn wachsen.

1. Der Drehwinkel zwischen zwei Strahlen

Es seien s und t zwei Strahlen in der Ebene mit dem gleichen Anfangspunkt A. Man legt ein Ziffernblatt um A, das in 360 gleiche Teile eingeteilt ist. Die Ziffern mögen entgegengesetzt dem Uhzeigersinn wachsen.

Es sei $x(s) \in \mathbb{R}$ die Ziffer, wo der Strahl s liegt und $x(t) \in \mathbb{R}$ die Ziffer, wo der Strahl t liegt. Man definiert den Drehwinkel:

$$\sphericalangle(s, t) = x(t) - x(s)$$



60
50
70
40
80
30
90
20
10=370
0=360
-10=350
-20=340
-30=330
120
140
150
180
210
240
270
300
s
t
u
v
A
50°
- 80°
280°

2. Der Drehwinkel zwischen zwei Strahlen

In der Zeichnung:

$$\sphericalangle(s,t) = 50^o$$

Eine volle Umdrehung um 360^0 zählt nicht, d.h.

$$\sphericalangle(s,t) = 50^o = -310^0 = 410^o.$$

Allgemeiner geschrieben gilt

$$\begin{aligned} \ldots 50^o - 2\cdot 360^o = 50^o - 360^o = 50^o = 50^o + 360^o \\ = 50^o + 2\cdot 360^o = 50^o + 3\cdot 360^o \ldots \end{aligned}$$

3. Eigenschaften des Drehwinkels

Es seien r, s, t drei Strahlen, die von einem Punkt A ausgehen. Dann gilt:

$$\sphericalangle(r,s) + \sphericalangle(s,t) = \sphericalangle(r,t). \tag{1}$$

$$\text{Also:} \quad \sphericalangle(s,t) + \sphericalangle(t,s) = 0^\circ.$$

3. Eigenschaften des Drehwinkels

Es seien r, s, t drei Strahlen, die von einem Punkt A ausgehen. Dann gilt:

$$\sphericalangle(r,s) + \sphericalangle(s,t) = \sphericalangle(r,t). \tag{1}$$

$$\text{Also:} \quad \sphericalangle(s,t) + \sphericalangle(t,s) = 0^\circ.$$

Es sei $-s$ der Strahl mit dem gleichen Anfangspunkt wie s, aber mit entgegengesetzter Richtung. Die Vereinigung der Strahlen s und $-s$ ist eine Gerade g. Offensichtlich gilt:

$$\sphericalangle(s,-s) = 180^\circ \tag{2}$$

3. Eigenschaften des Drehwinkels

Es seien r, s, t drei Strahlen, die von einem Punkt A ausgehen. Dann gilt:

$$\sphericalangle(r,s) + \sphericalangle(s,t) = \sphericalangle(r,t). \tag{1}$$

$$\text{Also:} \quad \sphericalangle(s,t) + \sphericalangle(t,s) = 0^\circ.$$

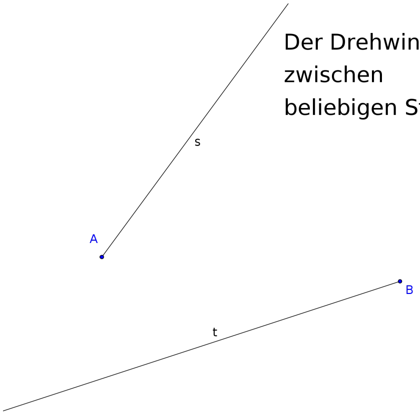
Es sei $-s$ der Strahl mit dem gleichen Anfangspunkt wie s, aber mit entgegengesetzter Richtung. Die Vereinigung der Strahlen s und $-s$ ist eine Gerade g. Offensichtlich gilt:

$$\sphericalangle(s,-s) = 180^\circ \tag{2}$$

Es sei T eine Translation. Dann gilt

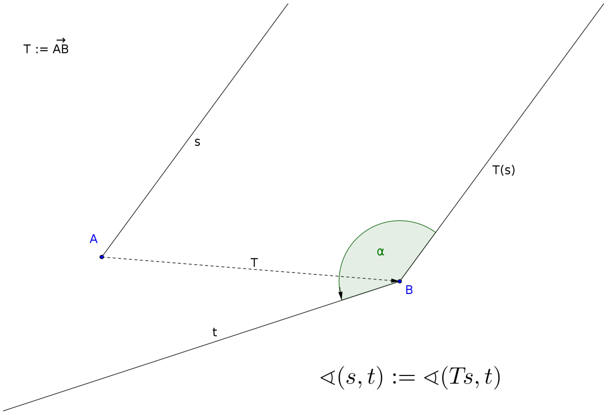
$$\sphericalangle(T(s), T(t)) = \sphericalangle(s,t).$$

4. Der Drehwinkel zwischen zwei Strahlen



Der Drehwinkel
zwischen
beliebigen Strahlen.

5. Der Drehwinkel zwischen zwei Strahlen



$$\sphericalangle(s,t) := \sphericalangle(Ts,t)$$

6. Der Drehwinkel zwischen zwei Strahlen

Der Drehwinkel zwischen zwei Strahlen s und t ist auch definiert, wenn sie nicht den gleichen Anfangspunkt haben. Für jede Translation T gilt

$$\sphericalangle(s,t) = \sphericalangle(Ts,t) = \sphericalangle(s,Tt).$$

6. Der Drehwinkel zwischen zwei Strahlen

Der Drehwinkel zwischen zwei Strahlen s und t ist auch definiert, wenn sie nicht den gleichen Anfangspunkt haben. Für jede Translation T gilt

$$\sphericalangle(s,t) = \sphericalangle(Ts,t) = \sphericalangle(s,Tt).$$

Auch wenn die Anfangspunkte nicht übereinstimmen gilt:

$$\sphericalangle(r,s) + \sphericalangle(s,t) = \sphericalangle(r,t).$$

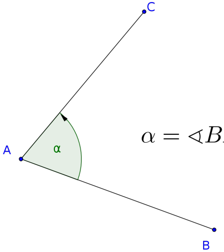
7. Die Winkelsumme im Dreieck

Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Wir schreiben $\overset{\mapsto}{AB}$ für den Strahl mit dem Anfang A in Richtung B.

7. Die Winkelsumme im Dreieck

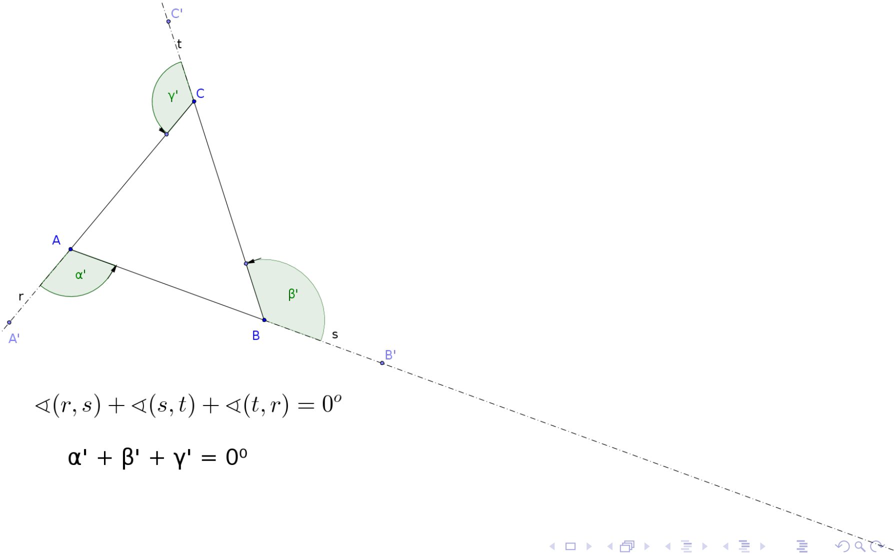
Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Wir schreiben $\overset{\mapsto}{AB}$ für den Strahl mit dem Anfang A in Richtung B.
Es sei C ein weiterer Punkt. Dann schreiben wir

$$\sphericalangle(BAC) := \sphericalangle(\overset{\mapsto}{AB}, \overset{\mapsto}{AC})$$



$\alpha = \sphericalangle BAC$

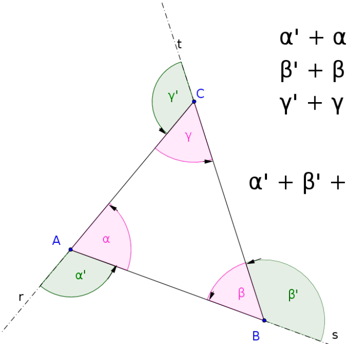
8. Die Winkelsumme im Dreieck



$$\sphericalangle(r,s) + \sphericalangle(s,t) + \sphericalangle(t,r) = 0^o$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 0^o$$

9. Die Winkelsumme im Dreieck



$$\alpha' + \alpha = 180°$$
$$\beta' + \beta = 180°$$
$$\gamma' + \gamma = 180°$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \alpha + \beta + \gamma = 3 \cdot 180°$$
$$= 180^0$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

10. Die Winkelsumme im Dreieck

Mit den Bezeichnungen der letzten Zeichnung gilt:

$$\alpha = \sphericalangle(BAC), \quad \beta = \sphericalangle(CBA) \quad \gamma = \sphericalangle(ACB)$$

.

10. Die Winkelsumme im Dreieck

Mit den Bezeichnungen der letzten Zeichnung gilt:

$$\alpha = \sphericalangle(BAC), \quad \beta = \sphericalangle(CBA) \quad \gamma = \sphericalangle(ACB)$$

.

Proposition

Es sei ABC ein Dreieck. Dann gilt:

$$\sphericalangle(BAC) + \sphericalangle(CBA) + \sphericalangle(ACB) = 180^o.$$

11. Die Drehung

Es sei E eine Ebene. Es sei $M \in E$ ein Punkt und α ein Drehwinkel. Wir definieren

$$\vartheta : E \to E.$$

11. Die Drehung

Es sei E eine Ebene. Es sei $M \in E$ ein Punkt und α ein Drehwinkel. Wir definieren

$$\vartheta : E \to E.$$

Wenn $A \neq M$ ein Punkt von E, so ist $A' = \vartheta(A)$ charakterisiert durch:

$$\alpha = \sphericalangle(AMA'), \quad |AM| = |A'M|.$$

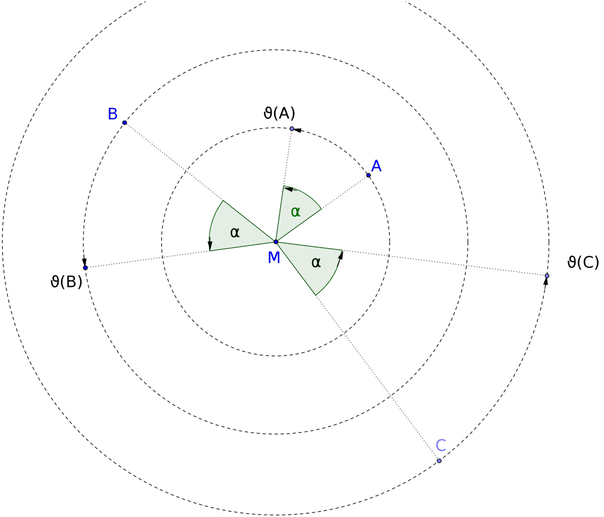
Der Punkt M ist ein Fixpunkt von ϑ, d.h. $\vartheta(M) = M$.
Wir schreiben $\vartheta = D(M, \alpha)$.

12. Die Drehung

Drehung ϑ
um den Punkt M
und den
Drehwinkel α

$\vartheta(M) = M$

$\vartheta = D(M,\alpha)$



13.Eigenschaften einer Drehung

Eine Drehung $\vartheta : E \to E$ hat die folgenden Eigenschaften:

(1) Die Abbildung ϑ ist bijektiv.

(2) Wenn g eine Gerade ist, so auch $\vartheta(g)$.

(3) Wenn $g \parallel h$ parallel sind, so ist auch $\vartheta(g) \parallel \vartheta(h)$.

(4) Wenn $A, B \in E$, so gilt

$$|\vartheta(A)\vartheta(B)| = |AB|.$$

(5) Die Abbildung ϑ hat genau einen Fixpunkt.

(6)

$$\sphericalangle(\vartheta(B)\vartheta(A)\vartheta(C)) = \sphericalangle(BAC).$$

14. Die Mittelsenkrechte

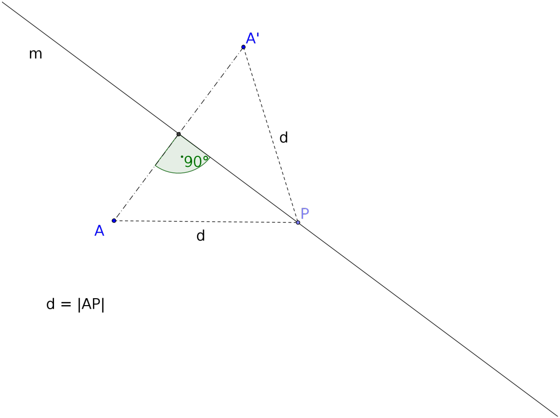
Es seien A und A' zwei verschiedene Punkte von E. Es sei m die Menge aller Punkte, die von A und A' den gleichen Abstand haben.

14. Die Mittelsenkrechte

Es seien A und A' zwei verschiedene Punkte von E. Es sei m die Menge aller Punkte, die von A und A' den gleichen Abstand haben.

$$m = \{P \in E \mid |PA| = |PA'|\}$$

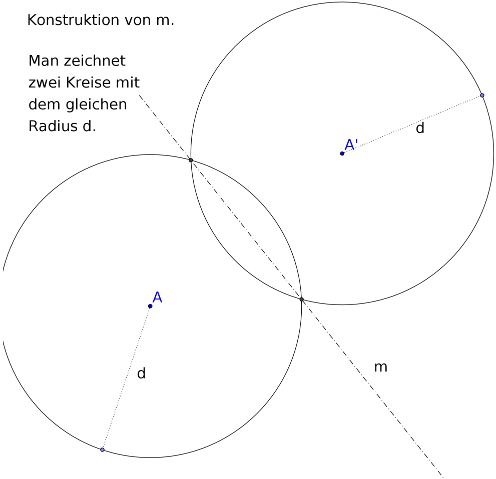
Tatsache: Die Menge m ist eine Gerade, die auf AA' senkrecht steht.
Die Strecke $\overline{AA'}$ wird folglich von m halbiert.



d = |AP|

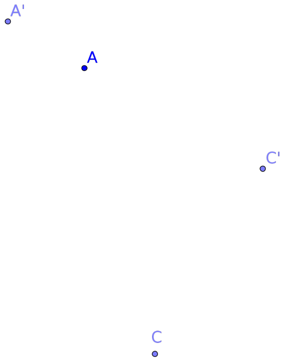
Konstruktion von m.

Man zeichnet
zwei Kreise mit
dem gleichen
Radius d.



15.Konstruktion des Drehwinkels und Fixpunktes einer Drehung

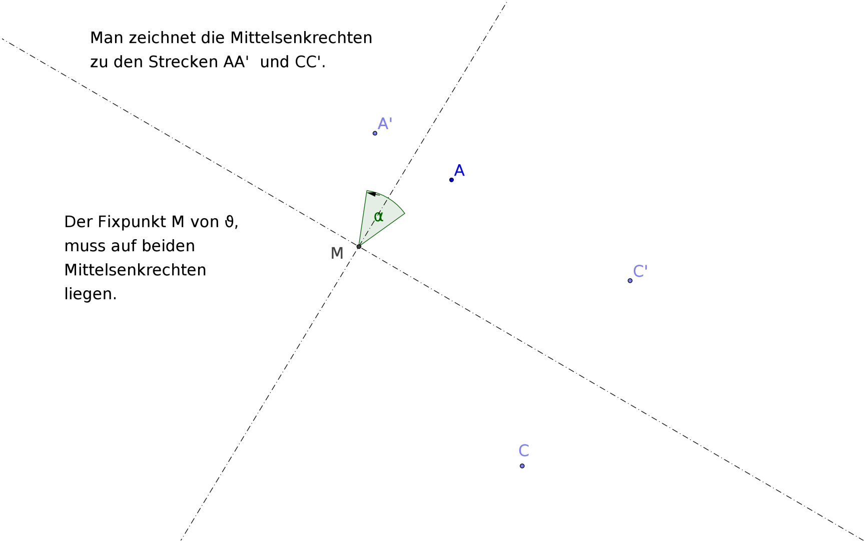
Es sei ϑ eine Drehung,
so dass
$\vartheta(A) = A'$, $\vartheta(C) = C'$



Man finde den Fixpunkt und den Drehwinkel von ϑ.

Man zeichnet die Mittelsenkrechten
zu den Strecken AA' und CC'.

Der Fixpunkt M von ϑ,
muss auf beiden
Mittelsenkrechten
liegen.



16. Der geometrische Winkel zwischen zwei Strahlen

Der geometrische Winkel $\alpha = \angle(s, t)$ zwischen zwei Strahlen s und t ist eine Zahl, so dass

$$0 \leq \alpha \leq 180.$$

Man findet eine Zahl ϑ, $0 \leq \vartheta \leq 360$, so dass

$$\sphericalangle(s, t) = \vartheta.$$

16. Der geometrische Winkel zwischen zwei Strahlen

Der geometrische Winkel $\alpha = \angle(s,t)$ zwischen zwei Strahlen s und t ist eine Zahl, so dass

$$0 \leq \alpha \leq 180.$$

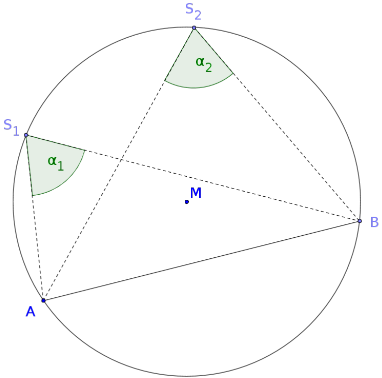
Man findet eine Zahl ϑ, $0 \leq \vartheta \leq 360$, so dass

$$\sphericalangle(s,t) = \vartheta.$$

$$\angle(s,t) = \begin{cases} \vartheta, & \text{wenn } 0 \leq \vartheta \leq 180 \\ 360 - \vartheta, & \text{wenn } 180 \leq \vartheta \leq 360. \end{cases}$$

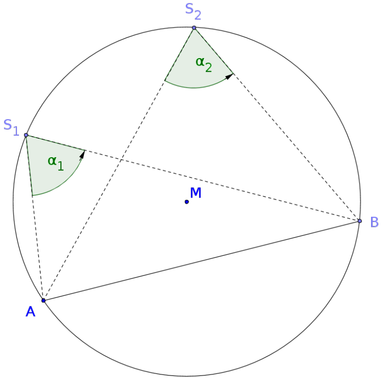
Der geometrische Winkel ist der Winkel aus der Schule. Er heißt auch einfach Winkel.

Wir wissen, dass $\alpha_1 = \alpha_2$.
In der Tat:
$2\alpha_1 = \angle AMB = 2\alpha_2$.



Das gleiche gilt dann auch f''ur die Drehwinkel, wenn man sie gleich orientiert (z.B. entgegen dem Urzeigersinn).

$\sphericalangle AS_1B = \sphericalangle AS_2B$



17. Winkelsumme im Dreieck

Wir berechnen die Summe der geometrischen Winkel α, β, γ im Dreieck. Das sind drei Zahlen, die auch die Größe der Drehwinkel angeben. Da die Summe der Drehwinkel 180^o ist, folgt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180 + m \cdot 360,$$

wobei m eine ganze Zahl ist.

17. Winkelsumme im Dreieck

Wir berechnen die Summe der geometrischen Winkel α, β, γ im Dreieck. Das sind drei Zahlen, die auch die Größe der Drehwinkel angeben. Da die Summe der Drehwinkel 180^o ist, folgt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180 + m \cdot 360,$$

wobei m eine ganze Zahl ist.
Es gilt $0 < \alpha < 180$, $0 < \beta < 180$, $0 < \gamma < 180$. Also:

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < 3 \cdot 180 = 180 + 360.$$

17. Winkelsumme im Dreieck

Wir berechnen die Summe der geometrischen Winkel α, β, γ im Dreieck. Das sind drei Zahlen, die auch die Größe der Drehwinkel angeben. Da die Summe der Drehwinkel 180^o ist, folgt:

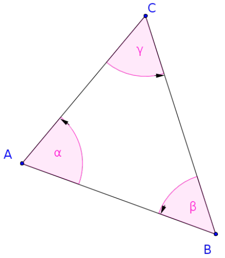
$$\alpha + \beta + \gamma = 180 + m \cdot 360,$$

wobei m eine ganze Zahl ist.
Es gilt $0 < \alpha < 180$, $0 < \beta < 180$, $0 < \gamma < 180$. Also:

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < 3 \cdot 180 = 180 + 360.$$

Es ergibt sich für die geometrischen Winkel:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180.$$


C
γ
A
α
β
B