Elementare Geometrie Vorlesung 5

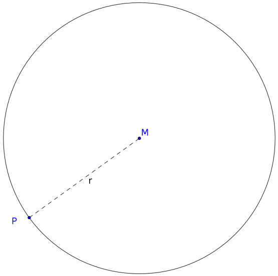
Thomas Zink

8.5.2017

Der Kreis

Es sei E eine Ebene. Es sei $r > 0$ eine Zahl und es sei $M \in E$. Der Kreis $\mathcal{K}$ mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ist die Mengen der folgenden Punkte P:

$$\mathcal{K} = \{P \in E \mid |MP| = r\}$$



1.Umkreis eines Dreiecks

Proposition

Durch drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen, geht eine Kreis.

Proposition

Durch drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen, geht eine Kreis.

Beweis: Es sei m die Mittelsenkrechte von AB und n die Mittelsenkrechte von BC. Nach Voraussetzung sind m und n nicht parallel. Es sei M ihr Schnittpunkt. Dann gilt

$$|AM| = |BM|, \quad |BM| = |CM|.$$

Also sind alle drei Längen gleich einer festen Länge r.
A, B, C liegen auf dem Kreis um M mit dem Radius r. $Q.E.D.$

2. Tangente an einen Kreis

Definition

Es sei $\mathcal{K}$ *ein Kreis mit dem Mittelpunkt* M. *Es sei* $P \in \mathcal{K}$. *Die Senkrechte* t *zu* MP *im Punkt* P *nennt man die Tangente an* $\mathcal{K}$ *im Punkt* P.

2. Tangente an einen Kreis

Definition

Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Es sei $P \in \mathcal{K}$. Die Senkrechte t zu MP im Punkt P nennt man die Tangente an $\mathcal{K}$ im Punkt P.

$$\mathcal{K} \cap t = \{P\}.$$

Beweis: Es sei $Q\mathcal{K} \cap t$ ein weiterer Schnittpunkt. Dann würde gelten:

$$r = |QM| > r$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $|PM|$ der Abstand von M zu t ist.

3.Konstruktion einer Tangente

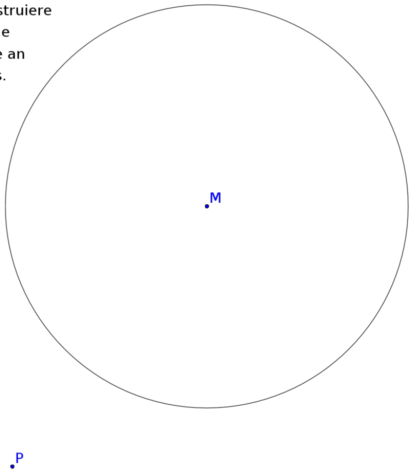
Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Die Konstruktion einer Tangente in einem Punkt $P \in \mathcal{K}$ ist einfach. Man konstruiert zur Geraden MP eine Senkrechte durch den Punkt P.

3.Konstruktion einer Tangente

Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Die Konstruktion einer Tangente in einem Punkt $P \in \mathcal{K}$ ist einfach. Man konstruiert zur Geraden MP eine Senkrechte durch den Punkt P.

Aufgabe: Es sei P ein Punkt außerhalb von $\mathcal{K}$. Man lege durch P eine Tangente an $\mathcal{K}$.

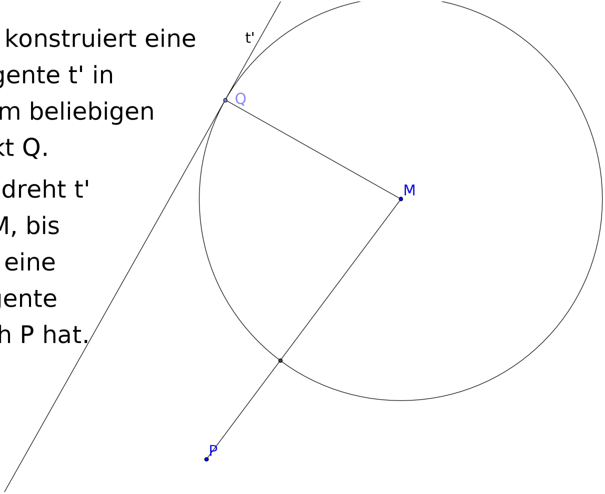
Man konstruiere
von P eine
Tangente an
den Kreis.



4.Erste Tangentenkonstruktion

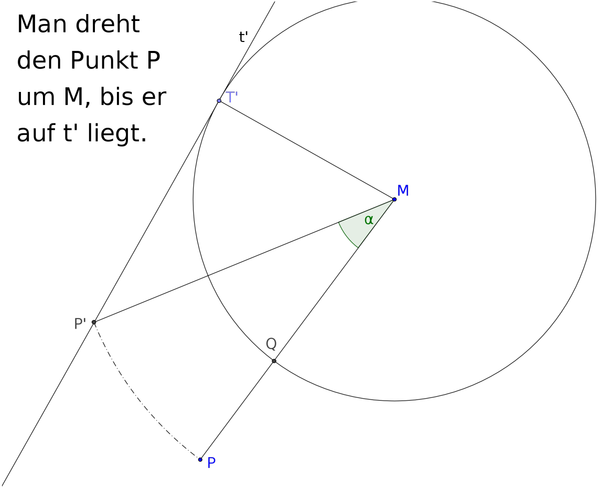
Man konstruiert eine Tangente t' in einem beliebigen Punkt Q.

Man dreht t' um M, bis man eine Tangente durch P hat.



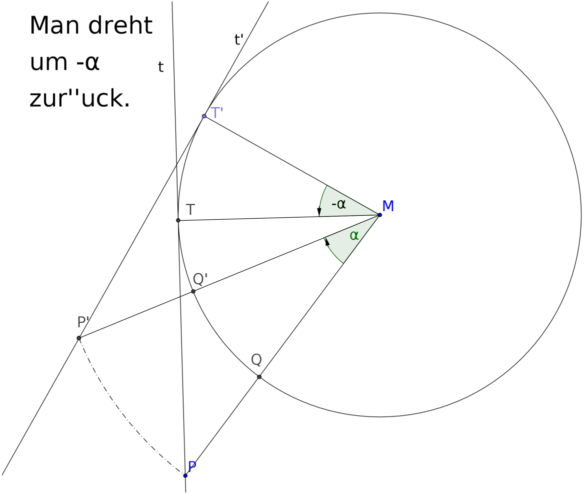
Erste Tangentenkonstruktion

Man dreht
den Punkt P
um M, bis er
auf t' liegt.



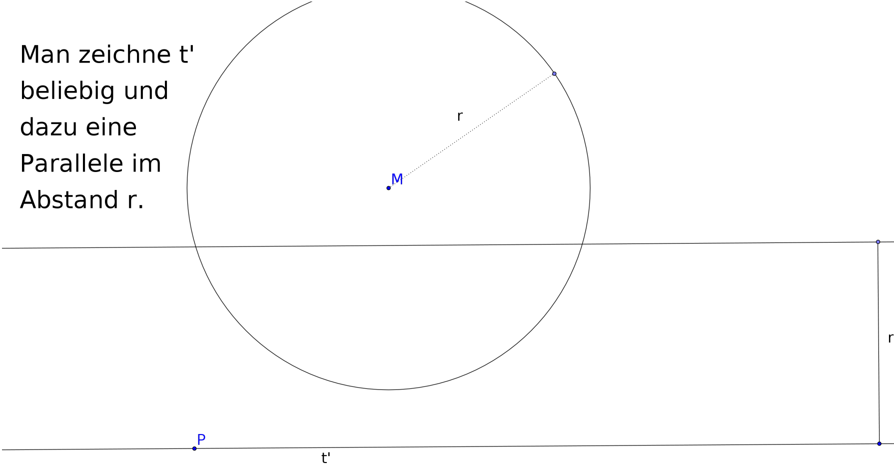
Erste Tangentenkonstruktion

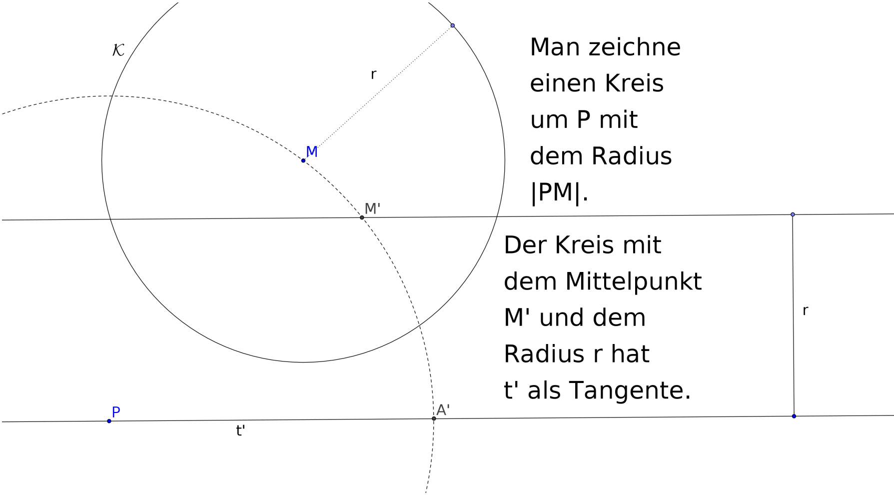
Man dreht
um -α
zur''uck.



5. Zweite Tangentenkonstruktion

Man zeichne t'
beliebig und
dazu eine
Parallele im
Abstand r.

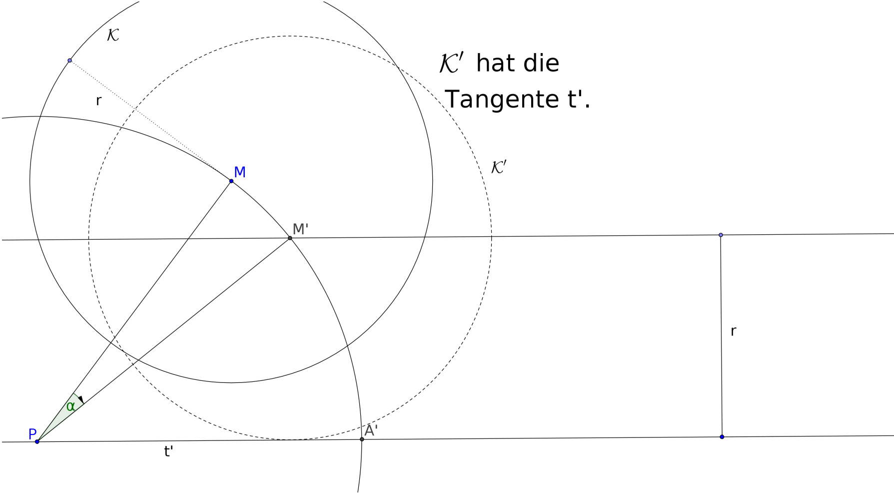




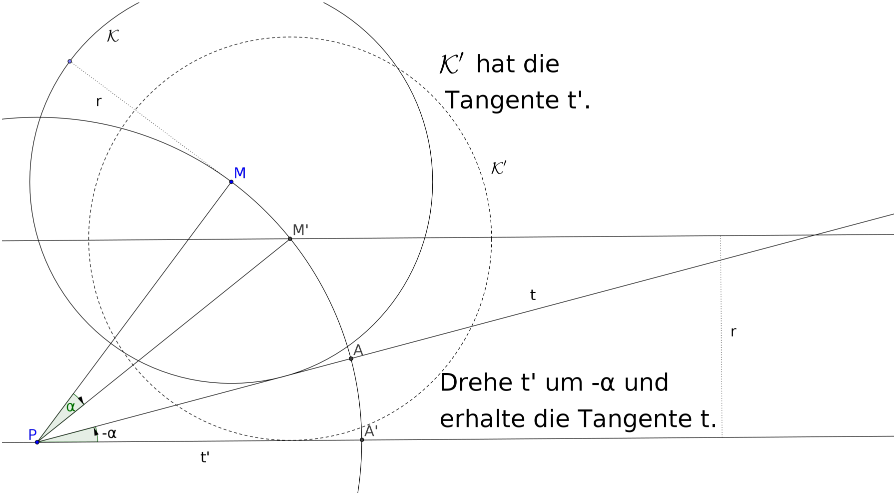
Man zeichne einen Kreis um P mit dem Radius |PM|.

Der Kreis mit dem Mittelpunkt M' und dem Radius r hat t' als Tangente.

$\mathcal{K}'$ hat die Tangente t'.



$\mathcal{K}'$ hat die Tangente t'.



Drehe t' um -α und erhalte die Tangente t.

6.Tangente an zwei Kreise

Die zweite Tangentenkonstruktion ist komplizierter, aber die Idee ist nützlich:

6. Tangente an zwei Kreise

Die zweite Tangentenkonstruktion ist komplizierter, aber die Idee ist nützlich:

Aufgabe: Man zeichne eine gemeinsame Tangente an zwei Kreise $(\mathcal{K}_1, M_1)$ und $(\mathcal{K}_2, M_2)$.

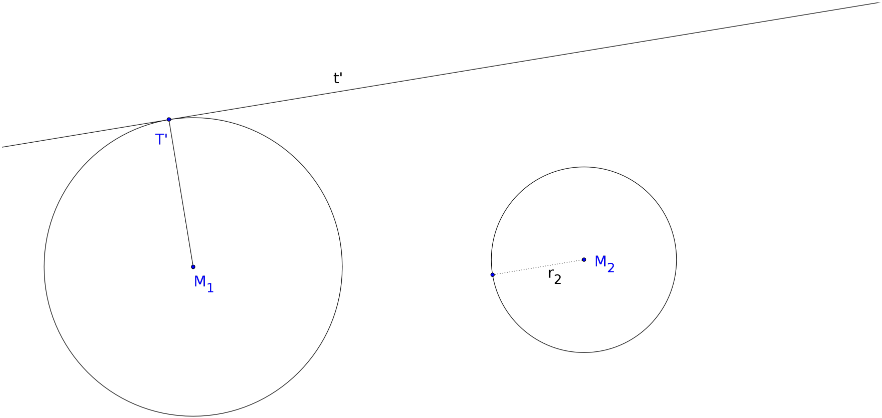
6. Tangente an zwei Kreise

Die zweite Tangentenkonstruktion ist komplizierter, aber die Idee ist nützlich:

Aufgabe: Man zeichne eine gemeinsame Tangente an zwei Kreise $(\mathcal{K}_1, M_1)$ und $(\mathcal{K}_2, M_2)$.

Lösung: Man legt an $\mathcal{K}_1$ eine Tangente t' und dreht um M_1, bis das auch eine Tangente an $\mathcal{K}_2$ ist.

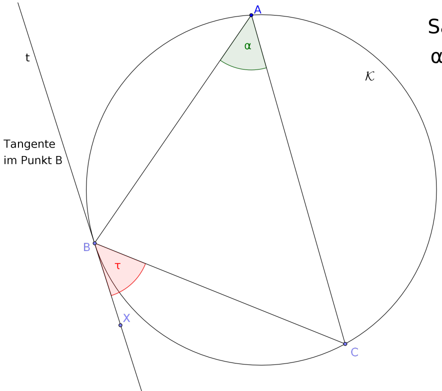
7. Tangente an zwei Kreise



8.Der Satz vom Sehnentangentenwinkel

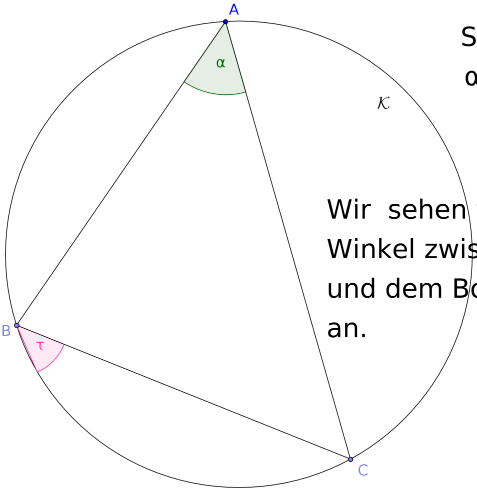
Es sei ABC ein Dreieck und $\mathcal{K}$ sein Umkreis. Es sei t die Tangente an B. Es sei $X \in t$ ein Punkt, so dass A und X auf verschiedenen Seiten der Geraden BC liegen. Dann gilt:

$$\angle BAC = \angle XBC.$$



Satz:

α = τ



Satz:

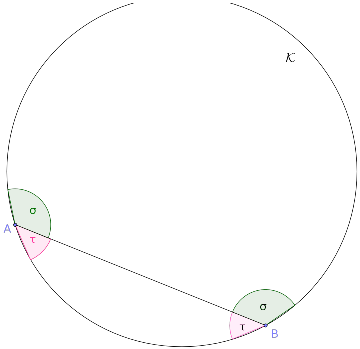
$\alpha = \tau$

Wir sehen τ als Winkel zwischen $\overset{\mapsto}{BC}$ und dem Bogen BC an.

9.Lemma zum Sehnentangentenwinkel

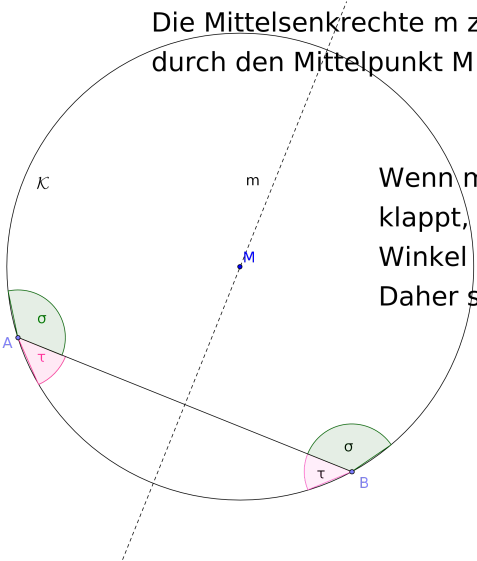
Lemma

Es sei AB eine Sehne im Kreis. Dann sind die Sehnentangentenwinkel bei A und B gleich groß.



10.Beweis des Lemmas

Die Mittelsenkrechte m zu AB geht durch den Mittelpunkt M des Kreises.

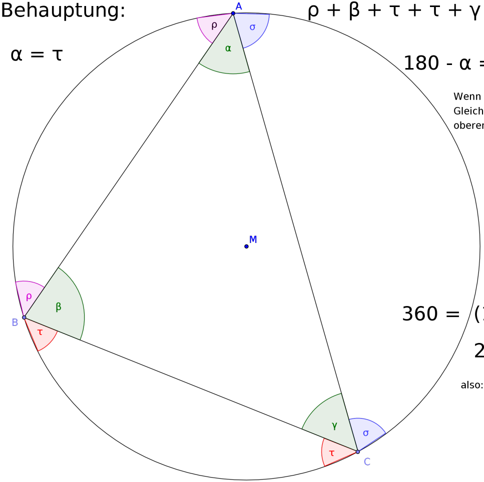


Wenn man um m klappt, fallen die Winkel aufeinander. Daher sind sie gleich.

11.Beweis des Satzes vom Sehnentangentenwinkel

Behauptung:

$\alpha = \tau$



$\rho + \beta + \tau + \tau + \gamma + \sigma = 180 + 180 = 360.$

$180 - \alpha = \beta + \gamma = \sigma + \rho.$

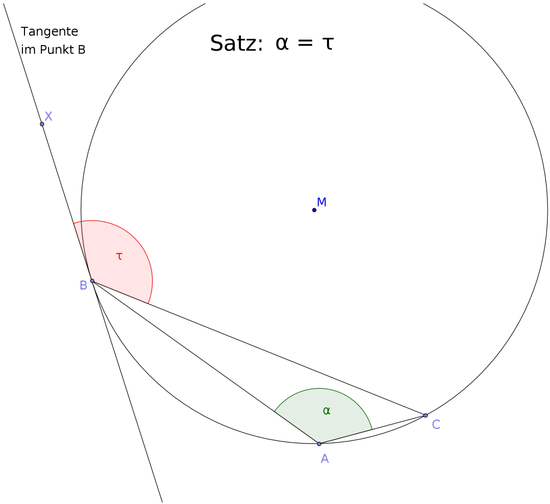
Wenn man die unteren Gleichungen in der oberen verwendet, folgt:

$360 = (180 - \alpha) + (180 - \alpha) + 2\tau$

$2\alpha = 2\tau$

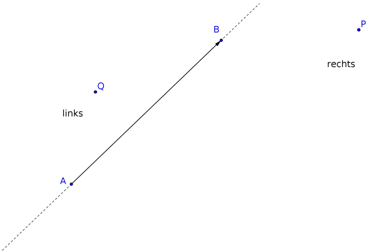
also: $\alpha = \tau$

12.Ein Fall von Sehnentangentenwinkel



13.orientierte Strecken

Wir nennen eine Strecke $\overline{AB}$ orientiert, wenn wir einen Anfangspunkt A und einen Endpunkt B festlegen.
Wenn $\overline{AB}$ eine orientierte Strecke in einer Ebene E ist, so können wir von den Punkten von E reden, die links von $\overline{AB}$ liegen bzw. rechts davon liegen.



14.Bewegungen

Definition

Es sei E eine Ebene. Eine Abbildung $f : E \to E$ heißt eine Bewegung, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

(1) *f ist bijektiv.*

(2) *f bildet Geraden auf Geraden ab.*

(3) *Für alle $A, B \in E$ gilt:*

$$|f(A)f(B)| = |AB|$$

(4) *Es liege P rechts (bzw. links) von der orientierten Strecke $\overline{AB}$. Dann liegt $f(P)$ rechts (bzw. links) von der orientierten Strecke $\overline{f(A)f(B)}$.*

Proposition

Es seien $f, g : E \to E$ *zwei Bewegungen. Dann ist auch das Kompositum* $f \circ g$ *eine Bewegung.*
Es sei $f : E \to E$ *eine Bewegung mit zwei verschiedenen Fixpunkten. Dann gilt* $f = \mathrm{id}_E$.