Elementare Geometrie Vorlesung 8

Thomas Zink

17.5.2017

1.Die Spieglung

Es sei $g \subset E$ eine Gerade in einer Ebene E im Raum. Wir drehen die Ebene E um die Achse g um 180^o. Dadurch erhalten wir eine Abbildung $s_g : E \to E$. Wir nennen s_g die Spieglung von E an der Achse g.

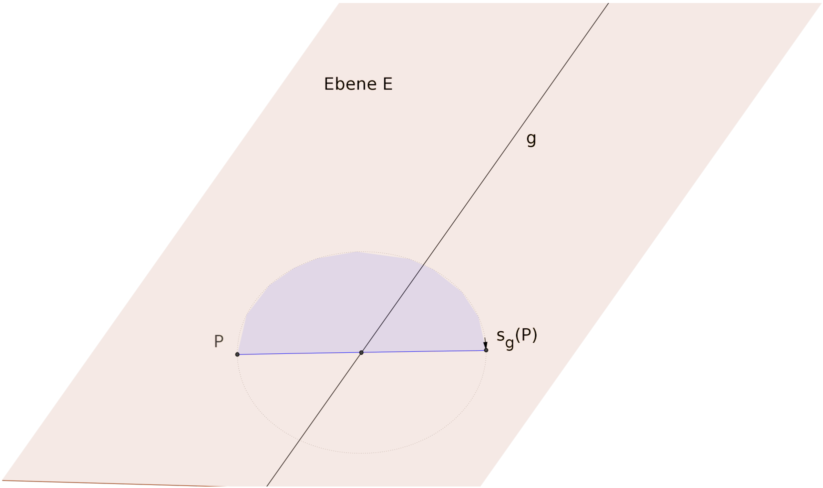
1.Die Spieglung

Es sei $g \subset E$ eine Gerade in einer Ebene E im Raum. Wir drehen die Ebene E um die Achse g um 180^o. Dadurch erhalten wir eine Abbildung $s_g : E \to E$. Wir nennen s_g die Spieglung von E an der Achse g.

Dann gilt:

$$s_g^2 := s_g \circ s_g = \mathrm{id}_E \,.$$

$$\begin{aligned} s_g(A) &= A, && A \in g, \\ |s_g(P)s_g(Q)| &= |PQ|, && P, Q \in E. \end{aligned}$$


Ebene E
g
P
s_g(P)

2.Die Spieglung

Es sei $P \notin g$. Offensichtlich liegen P und $s_g(P)$ auf verschiedenen Seiten der Geraden g.

2.Die Spieglung

Es sei $P \notin g$. Offensichtlich liegen P und $s_g(P)$ auf verschiedenen Seiten der Geraden g.

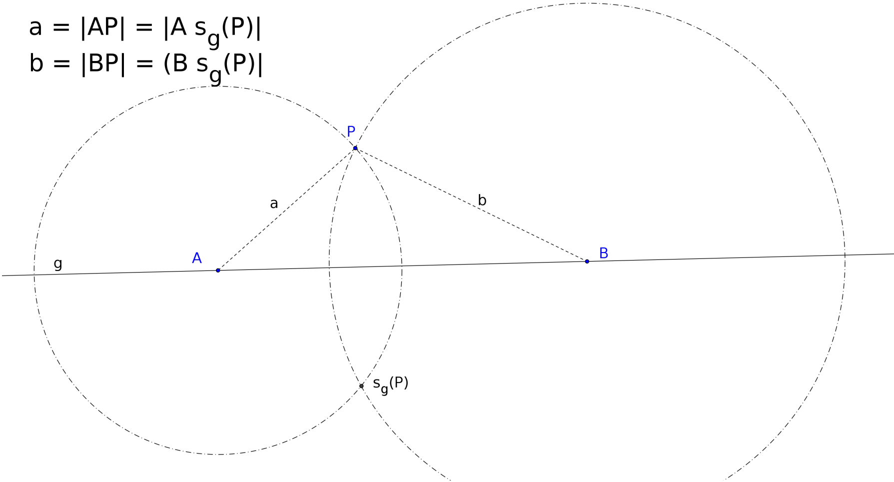
Es genau einen Punkt P', so dass g die Mittelsenkrechte von P und P' ist. Es gilt

$$s_g(P) = P', \quad s_g(P') = P.$$

In der Tat: Es sei $A \in g$. Dann muss gelten:

$$|PA| = |s_g(P)s_g(A)| = |s_g(P)A|.$$

$a = |AP| = |A\, s_g(P)|$
$b = |BP| = (B\, s_g(P))|$



3. Zwei Seiten einer Geraden

In der letzten Zeichnung haben die Punkte P und $s_g(P)$ sowohl zu A als auch zu B den gleichen Abstand. Daher ist die Gerade $g = AB$ die Mittelsenkrechte zu P und $s_g(P)$.

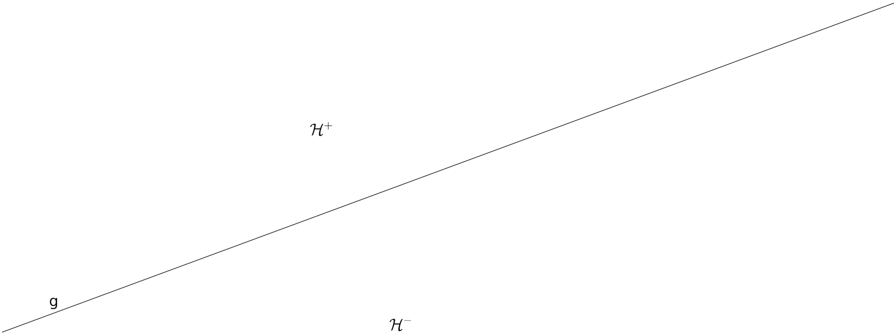
3. Zwei Seiten einer Geraden

In der letzten Zeichnung haben die Punkte P und $s_g(P)$ sowohl zu A als auch zu B den gleichen Abstand. Daher ist die Gerade $g = AB$ die Mittelsenkrechte zu P und $s_g(P)$.

Eine Gerade g in einer Ebene E zerlegt die Ebene in drei Teile

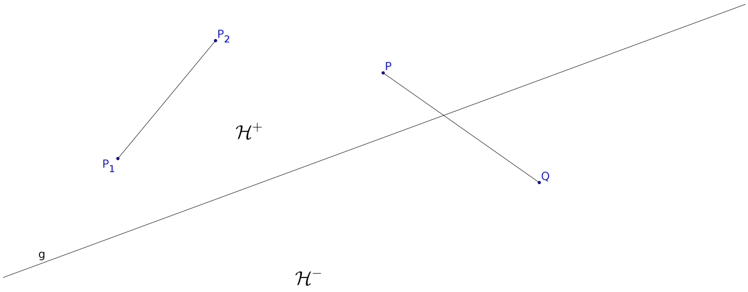
$$E = \mathcal{H}^+ \cup g \cup \mathcal{H}^-,$$

so dass jeweils zwei keine gemeinsamen Punkte haben.


$\mathcal{H}^+$
g
$\mathcal{H}^-$

4. Zwei Seiten einer Geraden

Die Verbindungsstrecke $\overline{P_1P_2}$ zweier Punkte $P_1, P_2 \in \mathcal{H}^+$ schneidet g nicht. Wenn dagegen $P \in \mathcal{H}^+$ und $Q \in \mathcal{H}^-$, so schneidet $\overline{PQ}$ die Gerade g.



5. Ein kürzester Weg

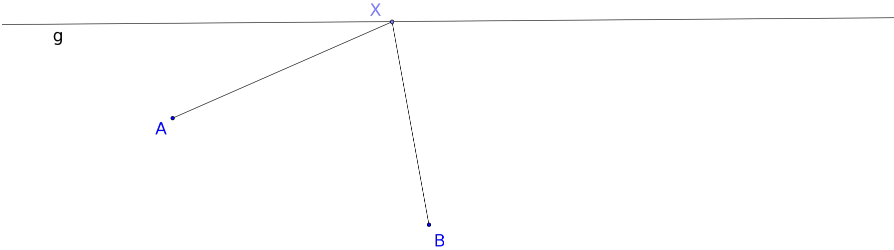
Die Spieglung s_g vertauscht die Seiten $\mathcal{H}^+$ und $\mathcal{H}^-$.

5. Ein kürzester Weg

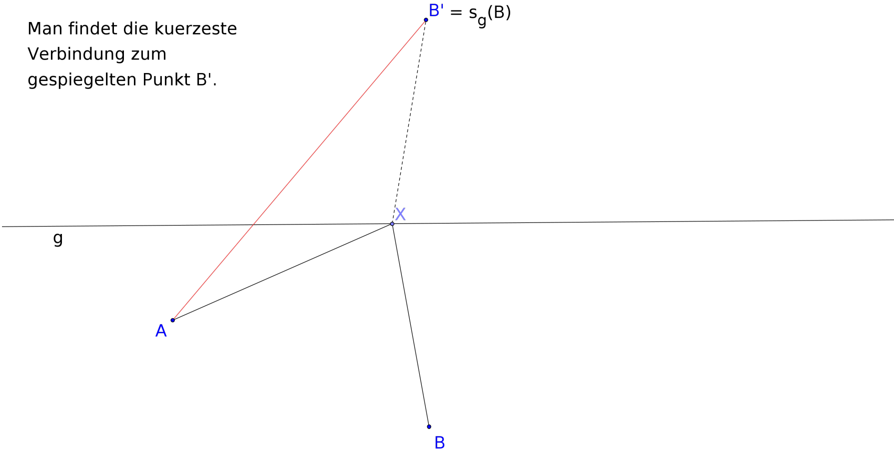
Die Spieglung s_g vertauscht die Seiten $\mathcal{H}^+$ und $\mathcal{H}^-$.
Aufgabe: Es seien $A, B \in \mathcal{H}^+$. Man finde einen Punkt $X \in g$, so dass

$$|AX| + |XB| = \text{Minimum}.$$

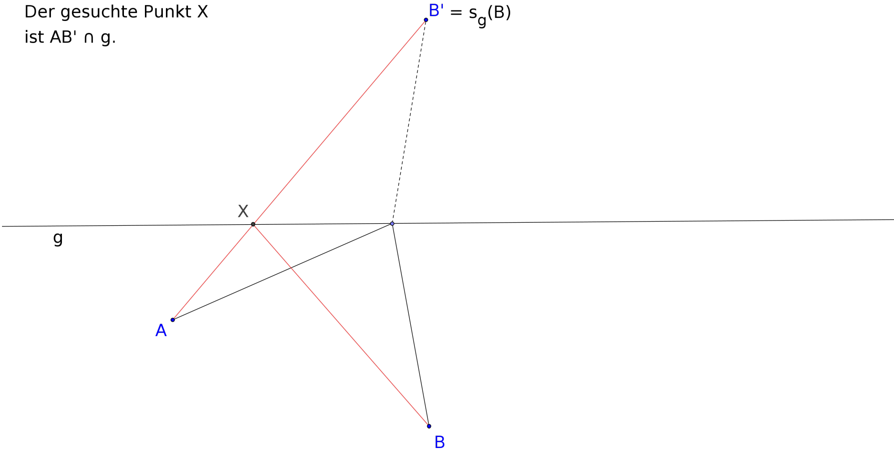
Wir raten einen Punkt X.



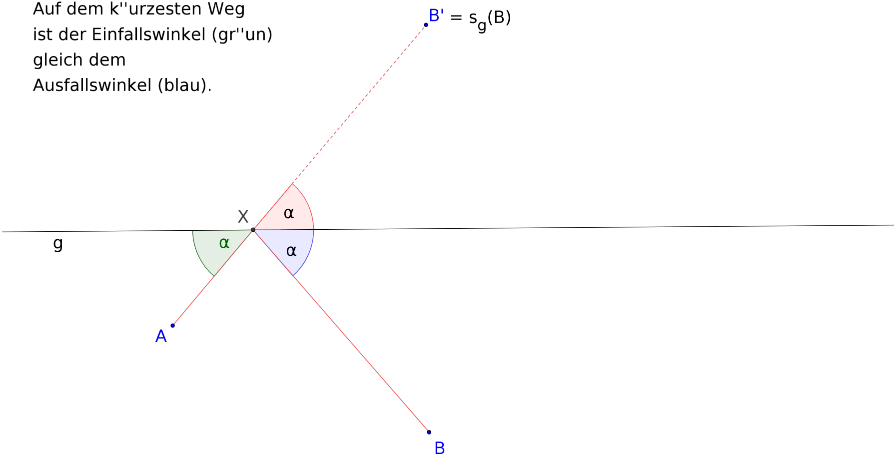
Man findet die kuerzeste Verbindung zum gespiegelten Punkt B'.



Der gesuchte Punkt X
ist AB' ∩ g.



Auf dem k''urzesten Weg
ist der Einfallswinkel (gr''un)
gleich dem
Ausfallswinkel (blau).



6.Billiard

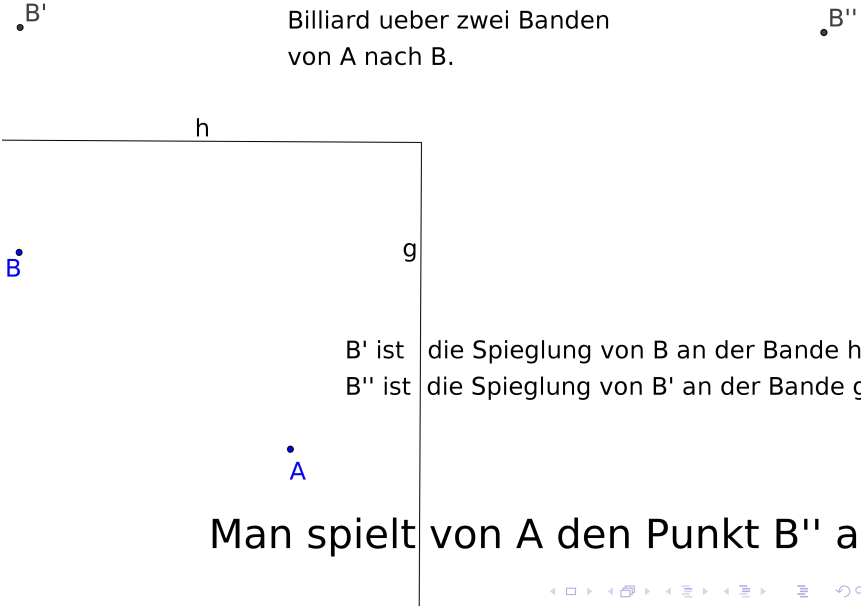
Beim Billiardspiel nimmt die Kugel den kürzesten Weg. Angenommen wir wollen mit der Kugel A über die Bande g die Kugel B anspielen. Dann müssen wir auf das Spiegelbild $s_g(B)$ der Kugel B zielen.

6.Billiard

Beim Billiardspiel nimmt die Kugel den kürzesten Weg. Angenommen wir wollen mit der Kugel A über die Bande g die Kugel B anspielen. Dann müssen wir auf das Spiegelbild $s_g(B)$ der Kugel B zielen.

Man kann auch Billiard über zwei Banden spielen. Man will mit der Kugel A die Kugel B über die Banden g und dann h anspielen.

Billiard ueber zwei Banden
von A nach B.

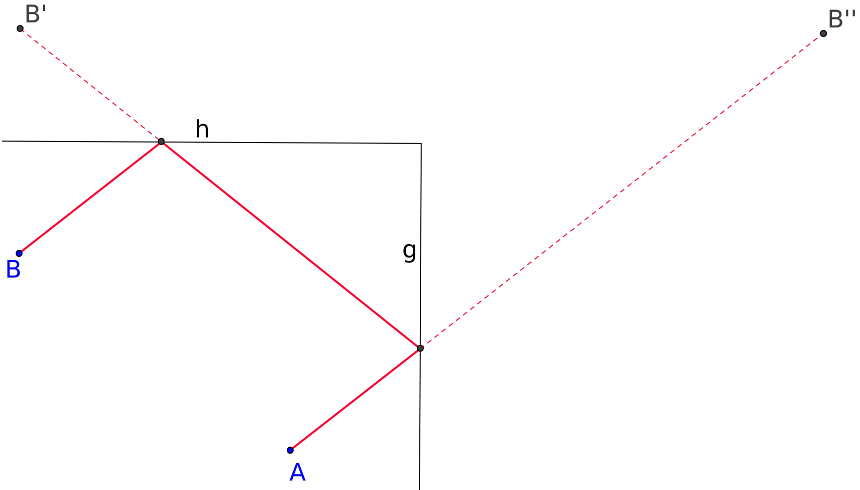


B' ist die Spieglung von B an der Bande h.
B'' ist die Spieglung von B' an der Bande g.

Man spielt von A den Punkt B'' an.

7.Erklärung zum Billiard

Wenn man den Punkt B'' anspielt, trifft die Kugel auf die Gerade g und läuft dann zum Spiegelbild von B'' bezüglich der Gerade g. Das ist B'. Wenn die Kugel dann die Bande h trifft, so läuft sie zum Spiegelbild von B' bezüglich der Gerade h. Das ist der Punkt B.

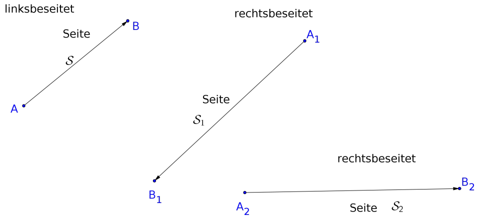


Man spielt von A den Punkt B'' an.

8.beseitete Strecken

Definition

Eine beseitete Strecke ist eine orientierte Strecke $\overline{AB}$ mit einer ausgezeichneten Seite der Geraden AB.
Wenn dies die rechte Seite ist, sprechen wir von einer rechtsbeseiteten Strecke und sonst von einer linksbeseiteten.



9.Spiegelnd oder nicht spiegelnd

Es sei E eine Ebene und $f : E \to E$ eine Abbildung, die Geraden auf Geraden abbildet.

Definition

Man nennt f spiegelnd, wenn f rechtsbeseitete Strecken auf linksbeseitete abbildet und linksbeseitete auf rechtsbeseitete.
Man nennt f nichtspiegelnd, wenn f rechtsbeseitete Strecken auf rechtsbeseitete abbildet und linksbeseitete Strecken auf linksbeseitete.

Bewegungen sind nichtspiegelnd und Spieglungen sind spiegelnd.

10.Isometrien

Definition

Es sei E eine Ebene. Eine Abbildung $f : E \to E$ heißt eine Isometrie, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

(1) *f ist bijektiv.*

(2) *f bildet Geraden auf Geraden ab.*

(3) *Für alle $A, B \in E$ gilt:*

$$|f(A)f(B)| = |AB|$$

Zur Erinnerung: Eine Bewegung ist eine nichtspiegelnde Isometrie.

11.Definition der Bewegungen zum Vergleich

Definition

Es sei E eine Ebene. Eine Abbildung $f : E \to E$ heißt eine Bewegung, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

(1) *f ist bijektiv.*

(2) *f bildet Geraden auf Geraden ab.*

(3) *Für alle $A, B \in E$ gilt:*

$$|f(A)f(B)| = |AB|$$

(4) *Es liege P rechts (bzw. links) von der orientierten Strecke $\overline{AB}$. Dann liegt $f(P)$ rechts (bzw. links) von der orientierten Strecke $\overline{f(A)f(B)}$.*

12.Der Hauptsatz über Isometrien

Theorem

Es seien $(\overline{A_1B_1}, \mathcal{S}_1)$ *und* $(\overline{A_2B_2}, \mathcal{S}_2)$ *zwei beseitete Strecken, so dass*

$$|A_1B_1| = |A_2B_2|$$

Dann gibt es genau eine Isometrie f*, so dass* $f(A_1) = A_2$, $f(B_1) = B_2$ *und* $f(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2$.

Beweis: Wir zeigen, dass f existiert. Wir finden eine Bewegung g so dass $g(A_1) = A_2$, $g(B_1) = B_2$. Wenn $g(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2$, so ist $f = g$ die gewünschte Isometrie. Sonst sei s die Spieglung an der Geraden A_2B_2. Dann ist $f = s \circ g$ die gewünschte Isometrie. Die Eindeutigkeit zeigt genauso wie für Bewegungen.

13.Spiegelnd oder nichtspiegelnd

Wir bemerken, dass jede Isometrie f entweder spiegelnd oder nichtspiegelnd ist.
Eine Bewegung ist nach Definition nichtspiegelnd. Wenn f keine Bewegung ist, so ist f das Kompositum einer Bewegung mit einer Spieglung: $f = s \circ g$. Wenn die Strecke $(\overline{AB}, \mathcal{S})$ rechtsbeseitet ist, so auch ihr Bild bei g. Wenn man auf das Bild s anwendet erhält man eine linksbeseitete Strecke.

14.Die Gleitspieglung

Es sei m eine Gerade. Eine Translation T nennt man parallel zu m, wenn m eine invariante Gerade von T ist. Dann kann man schreiben:

$$T = \overrightarrow{AB}, \quad \text{wo } A, B \in m.$$

14.Die Gleitspieglung

Es sei m eine Gerade. Eine Translation T nennt man parallel zu m, wenn m eine invariante Gerade von T ist. Dann kann man schreiben:

$$T = \vec{AB}, \quad \text{wo } A, B \in m.$$

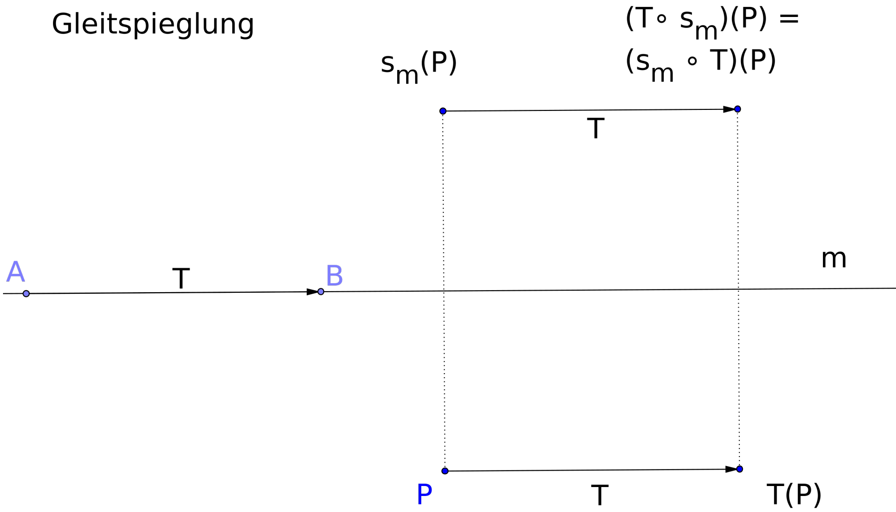
Definition

Es sei m eine Gerade und es sei T parallel zu m. Dann gilt:

$$s_m \circ T = T \circ s_m.$$

Wenn $T \neq 0$ heißt dieses Kompositum eine Geleitspieglung.

Gleitspieglung



15.Der Hauptsatz über Isometrien

Theorem

Es sei $f : E \to E$ eine Isometrie. Dann gibt es für f nur vier Möglichkeiten

(1) *f ist eine Translation.*

(2) *f ist eine Drehung.*

(3) *f ist die Spieglung an einer Geraden.*

(4) *f ist eine Gleitspieglung bezüglich einer Geraden m.*