Vorlesung Sommer 2009
Elementare Geometrie

1 Grundlagen

Längen und Winkel

Es seien A und B zwei Punkte in der Ebene oder im Raum. Wir bezeichnen mit $|AB|$ den *Abstand* der Punkte. Wir legen uns auf keine Maßeinheit fest: $|AB| \in \mathbb{R}$ ist eine nicht negative reelle Zahl die je zwei Punkten zugeordnet ist. Wenn M ein Punkt der Ebene ist, so gilt die Dreiecksungleichung:

$$|AM| + |MB| \geq |AB|.$$

In dieser Ungleichung steht nur das Gleichheitszeichen, wenn M ein Punkt der *Strecke* $\overline{AB}$ ist:

$$|AM| + |MB| = |AB|. \tag{1}$$

Ein weiterer Punkt N gehört genau dann zur Strecke $\overline{AB}$, wenn er zur Strecke $\overline{AM}$ oder zur Strecke $\overline{MB}$ gehört.

Wir sehen diese Sachverhalte als Grundtatsachen der Geometrie an, die wir aus der Anschauung übernehmen. Die dabei auftretenden Grundbegriffe, wie Strecke, Gerade, und Winkel werden nicht mehr auf andere Begriffe zurückgeführt, sondern durch ihre Eigenschaften charakterisiert. Im weiteren sollte man idealerweise nur diese Eigenschaften benutzen, ohne auf die Anschauung bezug zu nehmen. Wichtige Grundtatsachen kennzeichnen wir im folgenden als Prinzipien.

Im Gegensatz zu dieser theoretisch idealen Sichtweise steht aber in der geometrischen Praxis die Anschauung im Vordergrund, denn ohne sie geht die Schönheit der Geometrie verloren. Die Prinzipien sollte man als ein Gesetzbuch ansehen, das erst dann eine Rolle spielt, wenn es zu juristischen Auseinandersetzungen kommt.

Wir stellen im weiteren die Grundeigenschaften von Geraden, Strahlen und Winkeln zusammen.

Prinzip 1 *Zu zwei verschiedenen Punkten A, B der Ebene gibt es genau eine Gerade, die A und B enthält.*

Eine Gerade ist die Verlängerung einer Strecke. Wir präzisieren diese Vorstellung wie folgt: Drei Punkte A, B, C liegen genau dann auf einer Geraden, wenn einer der Punkte zu der Strecke gehört, die von den beiden anderen Punkten gebildet wird.

Zwei Geraden g und h von $\mathbb{E}$, die sich nicht schneiden nennt man *parallel.* In Zeichen:

$$g \parallel h.$$

Wir verabreden, dass wir auch noch jede Gerade als zu sich selbst parallel ansehen: $g \parallel g$. Das folgende Prinzip ist unter dem Namen "Parallelenaxiom" bekannt:

Prinzip 2 *Es sei g ein Gerade von $\mathbb{E}$ und P ein Punkt. Dann gibt es genau ein zu g parallele Gerade h, die den Punkt P enthält.*

Es sei g eine Gerade und $P \in g$ ein Punkt. Dann zerlegt P die Gerade in zwei *Strahlen.* Das bedeutet genauer folgendes: Es gibt eine Zerlegung von g in disjunkte Teilmengen:

$$g = \breve{s} \cup \{P\} \cup \breve{t}.$$

Es seien A, B zwei von P verschiedene Punkte von g. Dann enthält die Strecke $\overline{AB}$ genau dann den Punkt P, wenn einer der Punkte zu $\breve{s}$ und der andere zu $\breve{t}$ gehört. Die Mengen $s = \{P\} \cup \breve{s}$ und $t = \{P\} \cup \breve{t}$ nennt man Strahlen mit dem Anfangspunkt P. Man nennt diese beiden Strahlen entgegengesetzt und schreibt:

$$s = -t \text{ und } t = -s.$$

In ähnlicher Weise teilt eine Gerade g eine Ebene $\mathbb{E}$ in zwei *Halbebenen* ein: Es gibt eine Zerlegung in disjunkte Teilmengen

$$\mathbb{E} = \breve{H}_1 \cup g \cup \breve{H}_2.$$

Es seien A und B zwei Punkte von $\mathbb{E}$, die nicht in g liegen. Die Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ enthält genau dann einen Punkt von g, wenn der eine Punkt in $\breve{H}_1$ und der andere Punkt in $\breve{H}_2$ liegt. Die Mengen $H_i = g \cup \breve{H}_i$ für $i = 1, 2$ nennt man Halbebenen.

Es seien s und t zwei Strahlen in der Ebene mit dem gleichen Anfangspunkt A. Man legt ein Ziffernblatt um A, das in 360 gleiche Teile eingeteilt ist. Die Ziffern mögen entgegengesetzt dem Uhzeigersinn wachsen.

Es sei $x(s) \in \mathbb{R}$ die Ziffer, wo der Strahl s liegt und $x(t) \in \mathbb{R}$ die Ziffer, wo der Strahl t liegt. Dann ist $x(t) - x(s)$ der Drehwinkel zwischen s und t:

$$\sphericalangle(s,t) = x(t) - x(s)$$

(siehe Figur Winkelmessung)

Eine volle Umdrehung von einem der Strahlen s oder t ändert den Winkel nicht. Deshalb werden bei Drehwinkeln die folgenden Größen als gleich angesehen:

$$\ldots, \alpha - 2 \cdot 360,\ \alpha - 360,\ \alpha,\ \alpha + 360,\ \alpha + 2 \cdot 360, \ldots$$

So bezeichnen die folgenden Zahlen den gleichen Drehwinkel:

$$-50,\ 310,\ 670.$$

Wir schreiben $-50° = 310° = 670°$.

Diese Konvention hat den Vorteil, dass für drei Strahlen, die von dem Punkt A ausgehen, die folgende Gleichung gilt:

$$\sphericalangle(r,s) + \sphericalangle(s,t) = \sphericalangle(r,t). \tag{2}$$

Insbesondere folgt daraus:

$$\sphericalangle(s,t) + \sphericalangle(t,s) = 0°.$$

Es sei $-s$ der Strahl mit dem gleichen Anfangspunkt wie s, aber mit entgegengesetzter Richtung. Die Vereinigung der Strahlen s und $-s$ ist eine Gerade g. Offensichtlich gilt:

$$\sphericalangle(s,-s) = 180° \tag{3}$$

In diesem Fall sprechen wir von einem gestreckten Winkel. Aus den Gleichungen (2) und (3) folgert man, dass

$$\sphericalangle(s,t) = \sphericalangle(-s,-t) \tag{4}$$

Diese Gleichung besagt, dass Wechselwinkel gleich sind.

Wir sagen, dass zwei Strahlen s und t mit dem gleichen Anfangspunkt senkrecht aufeinander stehen (oder mit einem anderen Ausdruck orthogonal sind), wenn

$$\sphericalangle(s,t) = 90° \quad \text{oder} \quad \sphericalangle(s,t) = -90°$$

Diese Bedingungen sind damit äquivalent, dass s den gestreckten Winkel $(t, -t)$ halbiert:
$$\sphericalangle(s,t) = \sphericalangle(-t,s).$$
Man sieht, dass s und t genau dann orthogonal sind, wenn s und $-t$ es sind. Daher hat es Sinn von orthogonalen Geraden zu reden.

Neben dem Drehwinkel betrachtet man auch den geometrischen Winkel von zwei Strahlen s und t mit dem gleichen Anfang A. Es gibt genau eine Zahl α, so dass $0 \leq \alpha < 360$ und so dass
$$\sphericalangle(s,t) = \alpha.$$
Der geometrische Winkel $\angle(s,t)$ ist eine Zahl zwischen 0 und 180. Er ist folgendermaßen definiert:
$$\begin{array}{rll} \angle(s,t) = \alpha, & \text{wenn} & 0 \leq \alpha \leq 180 \\ \angle(s,t) = 360 - \alpha, & \text{wenn} & 180 \leq \alpha < 360. \end{array}$$
Für geometrische Winkel gilt:
$$\angle(s,t) = \angle(t,s).$$
Dagegen ist die Gleichung (2) für geometrische Winkel nicht mehr gültig.

Es seien A, B, C drei Punkte. Es sei s der Strahl mit dem Anfang A in Richtung B und es sei t der Strahl mit dem Anfang A in Richtung C. Dann schreiben wir:
$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle(s,t) \quad \text{und} \quad \angle BAC = \angle(s,t)$$

Zum Schluss wenden wir uns noch den Kreisen zu. Es sei $\mathbb{E}$ die Ebene. Eine Menge von Punkten in der Ebene bezeichen wir oft als geometrischen Ort.

Definition 3 *Es sei $M \in \mathbb{E}$ ein Punkt und $r > 0$ eine reelle Zahl. Der Kreis $\mathcal{K}$ mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ist der geometrische Ort aller Punkte $A \in \mathbb{E}$, so dass der Abstand von A zu M gleich r ist.*

Wir schreiben das als Formel:
$$\mathcal{K} = \{A \in \mathbb{E} \mid |AM| = r\}.$$

Prinzip 4 *Es seien A, B, C drei Punkte, die paarweise verschieden sind. Dann gibt es entweder einen Kreis oder eine Gerade auf dem diese drei Punkte liegen. Zwei Kreise durch die Punkte A, B, C müssen notwendig gleich sein.*

Aus dem Prinzip folgt, dass sich zwei Kreise bzw. ein Kreis und eine Gerade höchstens in zwei Punkten schneiden können.

Es sei $\mathcal{K}_1$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1 und es sei $\mathcal{K}_2$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2. Wir nehmen an, dass $r_1 \geq r_2$. Wenn $r_1 - r_2 < |M_1 M_2| < r_1 + r_2$, so schneiden sich die beiden Kreise in zwei Punkten.

2 Isometrien der Ebene

Definition 5 *Eine Abbildung $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ der Ebene $\mathbb{E}$ auf sich nennt man eine* Isometrie*, wenn ϕ bijektiv ist, und wenn für je zwei Punkte A und B der Ebene*

$$|\phi(A)\phi(B)| = |AB|, \quad \textit{für alle } A, B \in \mathbb{E} \tag{5}$$

Es ist klar, dass die Umkehrabbildung ϕ^{-1} einer Isometrie wieder eine Isometrie ist. Aus der Eigenschaft (1) sieht man, dass eine Isometrie eine Strecke wieder auf eine Strecke abbildet. Wir folgern, dass eine Isometrie Geraden auf Geraden abbildet. Genauso sieht man, dass eine Isometrie Kreise wieder auf Kreise abbildet.

Definition 6 *Es sei ϕ ein Isometrie der Ebene. Wir nennen ein Punktmege $\mathcal{F}$ von $\mathbb{E}$ invariant bei ϕ, wenn*

$$\phi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}.$$

Bemerkung: Für die Figuren die in diesem Skript vorkommen, kann man leicht zeigen, dass die Inklusion $\phi(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ bereits impliziert, dass $\mathcal{F}$ bei ϕ invariant ist.

Bewegungen sind Abbildungen der Ebene, die anschaulich dadurch entstehen, dass man zwei Ebenen, die wie zwei Blätter Papier übereinanderliegen gegeneinander verschiebt. Wir beschreiben Bewegungen mathematisch dadurch, dass wir aufzählen, welche Eigenschaften Bewegungen haben sollen:

Die Bewegungen sind eine Menge $\mathcal{B}$ von Isometrien mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die identische Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ist eine Bewegung, d.h. $\mathrm{id} \in \mathcal{B}$.

(ii) Wenn $\phi \in \mathcal{B}$ und $\psi \in \mathcal{B}$, so ist auch $\phi \circ \psi \in \mathcal{B}$.

(iii) Wenn $\phi \in \mathcal{B}$, so gilt $\phi^{-1} \in \mathcal{B}$.

(iv) Für zwei Strahlen s und t mit dem gleichen Anfangspunkt gilt, dass

$$\sphericalangle(\phi(s), \phi(t)) = \sphericalangle(s, t). \tag{6}$$

Die entscheidene Eigenschaft von Bewegungen ist:

Prinzip 7 *Es sei s ein Strahl mit dem Anfangspunkt P. Es sei t ein Strahl mit dem Anfangspunkt Q. Dann gibt es genau eine Bewegung ϕ, so dass $\phi(s) = t$. Insbesondere besagt das $\phi(P) = Q$.*

Man kann dieses Prinzip auch so formulieren: Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei Strecken der gleichen Länge: $|AB| = |CD|$.

Dann gibt es genau eine Bewegung ϕ, so dass

$$\phi(A) = C, \quad \text{und} \quad \phi(B) = D.$$

Warnung: Im allgemeinen gilt

$$\phi \circ \psi \neq \psi \circ \phi$$

Es seien s und t zwei Strahlen, die von einem Punkt Z ausgehen. Dann gibt es nach dem Prinzip 7 genau eine Bewegung D, so dass $D(s) = t$. Wir nennen D eine *Drehung* um den Punkt Z.

Es sei s' ein weiterer Strahl, der vom Punkt Z ausgeht und $D(s') = t'$. Dann hat t' den Anfang Z. Nach (2) finden wir:

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle(s', D(s')) = \sphericalangle(s', s) + \sphericalangle(s, D(s)) + \sphericalangle(D(s), D(s')) \\
&= \sphericalangle(s', s) + \sphericalangle(s, D(s)) + \sphericalangle(s, s') = \sphericalangle(s', s') + \sphericalangle(s, D(s)) \\
&= \sphericalangle(s, D(s))
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung gilt nach (6).

Der Winkel $\alpha = \sphericalangle(s, D(s))$ hängt also nicht von der Wahl des Strahls s ab. Wir nennen α den Drehwinkel von D. Wir bezeichen die Drehung D mit

$$D(Z, \alpha) \tag{7}$$

und nennen sie die Drehung um den Drehwinkel α mit dem Zentrum Z. Es ist klar, dass jede Bewegung, die einen Fixpunkt Z besitzt, eine Drehung ist.

Man erhält unmittelbar aus der Definition des Drehwinkels einer Drehung, dass

$$D(Z, \alpha) \circ D(Z, \beta) = D(Z, \alpha + \beta) \tag{8}$$

Ein wichtiger Spezialfall einer Drehung ist die Drehung um 180°, die auch den Namen *Punktspieglung* trägt. Da $\sphericalangle(s, -s) = 180°$ gilt für eine Punktspieglung mit dem Zentrum Z, dass für einen beliebiegen Strahl s, der von Z ausgeht:

$$D(s) = -s. \tag{9}$$

Insbesondere sind alle Geraden g durch Z bei einer Punktspieglung invariant:

$$D(g) = g.$$

Aus der Gleichung (9) erhält man, dass für eine Punktspieglung D:

$$D^2 := D \circ D = \mathrm{id}\,.$$

Satz 8 *Es sei D eine Punktspieglung mit dem Zentrum Z. Dann geht jede invariante Gerade von D durch Z.*

Beweis: Es sei h eine invariante Gerade. Wir wählen einen Punkt $X \in h$, so dass $X \neq Z$. Es sei $g = XZ$ die Verbindungsgerade. Da g eine invariante Gerade ist, folgt

$$D(X) \in g \cap h$$

Wenn $D(X) = X$, so hätte D einen zweiten Fixpunkt. Dann folgte $D = \mathrm{id}$. Das wäre ein Widerspruch, da id keine Punktspieglung ist. Also ist $D(X) \neq X$ und deshalb haben g und h zwei veschiedene Punkte X und $D(X)$ gemeinsam. Aber dann gilt $g = h$. *Q.E.D.*

Wenn D eine Punktspieglung ist, so gilt für jede Gerade g, dass g und $D(g)$ parallel sind. In der Tat: Wir können annehmen, dass g und folglich auch $D(g)$ nicht durch das Zentrum Z gehen. Angenommen es gäbe einen Schnittpunkt $Q \in g \cap D(g)$. Da $D(Q)$ auf der invarianten Gerade QZ liegt, folgt

$$D(Q) \in QZ \cap D(g).$$

Also hätten diese Geraden zwei gemeinsamem Punkte $D(Q) \neq Q$. Man erhält $QZ = D(g)$. Das ist eine Widerspruch.

Es seien A, B zwei Punkte. Dann gibt es genau eine Bewegung ϕ, so dass $\phi(A) = B$ und $\phi(B) = A$ (Prinzip 7). Das ist offenbar die Punktspieglung um den Mittelpunkt von AB.

Satz 9 *Es sei ϕ eine Bewegung der Ebene $\mathbb{E}$. Es sei $X \in \mathbb{E}$ ein Punkt. Wenn die Punkte X, $\phi(X)$, und $\phi^2(X)$ nicht auf einer Geraden liegen, so ist ϕ eine Drehung.*

Der Fixpunkt von ϕ ist der Mittelpunkt des Kreises $\mathcal{D}$ durch X, $\phi(X)$, und $\phi^2(X)$.

Beweis: Der Mittelpunkt des Kreises sei Z. Da $|ZX| = |Z\phi(X)|$ gibt es eine Drehung α, so dass $\alpha(X) = \phi(X)$ und $\alpha(Z) = Z$.

Wir wollen beweisen, dass $\alpha = \phi$.

Es sei $d = |X\phi(X)|$. Da α und ϕ Isometrien sind folgt:

$$d = |\phi(X)\phi^2(X)| = |\phi(X)\alpha(\phi(X))|$$

Es sei $\mathcal{K}$ der Kreis um $\phi(X)$ mit dem Radius d. Da sich zwei verschiedene Kreise höchstens in zwei Punkte schneiden, finden wir

$$\alpha(\phi(X)) \in \mathcal{K} \cap \mathcal{D} = \{X, \phi^2(X)\}.$$

In dem Fall, wo $\alpha(\phi(X)) = \phi^2(X)$, hat die Bewegung $\phi^{-1} \circ \alpha$ die beiden Fixpunkte X und $\phi(X)$. Folglich ist diese Bewegung die Identität und damit $\phi = \alpha$.

Wir müssen noch den zweiten Fall betrachten, wo $\alpha(\phi(X)) = X$. Dann wäre α die Punktspieglung an dem Mittelpunkt der Strecke $X\phi(X)$. Da Z ein Fixpunkt von α ist, wäre Z der Mittelpunkt der Strecke $X\phi(X)$. Damit hat der Kreis $\mathcal{D}$ den Radius $d/2$. Wir finden

$$|Z\phi(X)| + |Z\phi^2(X)| = (d/2) + (d/2) = |\phi(X)\phi^2(X)|.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass Z ein Punkt der Strecke $\overline{\phi(X)\phi^2(X)}$ ist. Also lägen im zweiten Fall die Punkte X und $\phi^2(X)$ auf der Geraden $Z\phi(X)$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Q.E.D.

Korollar 10 *Es sei ϕ eine Bewegung. Es sei g eine Gerade, so dass sich $\phi(g)$ und g genau in einem Punkt schneiden. Dann ist ϕ eine Drehung.*

Beweis (Siehe Abbildung [1]): Es sei $\phi(g) = h$ und es sei $Q = g \cap h$. Wenn Q ein Fixpunkt ist, so braucht man nichts zu beweisen. Sonst gibt es Punkte $A \in g$ und $B \in h$, die beide von Q verschieden sind, und so dass

$$\phi(A) = Q, \text{ und } \phi(Q) = B.$$

Dann kann man die letzte Proposition anwenden. *Q.E.D.*

Definition 11 *Es seien P und Q zwei verschiedene Punkte der Ebene. Es sei s der Strahl von P aus welcher Q enthält. Es sei t der Strahl von Q aus, so dass $t \subset s$.*

Dann gibt es genau eine Bewegung T, so dass $T(s) = t$. (Insbesondere besagt die letzte Gleichung, dass $T(P) = Q$.

Wir nennen T die Translation oder den Vektor von P nach Q und schreiben

$$T = \vec{PQ}.$$

Wenn $P = Q$, so setzen wir $T = \mathrm{id}$.

Satz 12 *Es sei $P \neq Q$. Dann hat die Translation $T = \vec{PQ}$ keinen Fixpunkt.*

Beweis: Wir betrachten die 3 Punkte P, $Q = T(P)$ und $T(Q) = T^2(P)$. Da $Q \in s$, folgt dass $T(Q) \in t$. Wir bemerken, dass Q kein Fixpunkt von T sein kann, da eine Isometrie injektiv ist. Also sind P, $T(P)$, $T^2(P)$ drei verschiedene Punkte, die auf einer Geraden liegen. Wenn T einen Fixpunkt hätte lägen diese Punkte auf einem Kreis. Das ist ein Widerspruch. *Q.E.D.*

Satz 13 *Es sei $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine Translation. Dann gilt:*

a) Es sei h eine Gerade. Dann gilt $\phi(h) \parallel h$.

b) Durch jeden Punkt der Ebene geht genau eine ϕ-invariante Gerade. Zwei ϕ-invariante Geraden sind parallel.

c) Es sei $P \in \mathbb{E}$ ein Punkt und es sei $\phi(P) = Q$. Dass ist $\phi = \vec{PQ}$.

Beweis: Wir können annehmen, dass ϕ nicht die identische Abbildung ist. Da ϕ keinen Fixpunkt besitzt ist a) eine unmittelbare Folgerung aus dem Korollar 10.

Wenn durch einen Punkt P zwei verschiedene ϕ-invariante Geraden gingen, so folgte $\phi(P) = P$. Daher geht durch jeden Punkt P höchstens eine ϕ-invariante Gerade.

Wir zeigen, dass durch jeden Punkt P eine ϕ-invariante Gerade geht. Wir können $P \notin g$ annehmen. Es sei h die Gerade $P\phi(P)$. Dann schneiden h und $\phi(h)$ im Punkt $\phi(P)$. Daher gilt nach a), dass $\phi(h) = h$. Da durch einen Punkt höchstens eine invariante Gerade geht, können sich h und g nicht schneiden. Das beweist b).

Schließlich zeigen wir c). Wir setzen $\psi = \vec{PQ}$. Nach b) lassen ϕ und ψ die Gerade PQ invariant. Wir betrachten die Bewegung $\sigma = \psi^{-1} \circ \phi$. Dann lässt auch σ die Gerade g invariant und hat den Fixpunkt P. Also ist σ die Indentität oder die Punktspieglung mit dem Fixpunkt P. Im ersten Fall gilt $\phi = \psi$.

Wir zeigen, dass der zweite Fall nicht auftreten kann. In der Tat, dann wäre $\sigma(Q) = Q'$ der einzige Punkt der Geraden g mit $|Q'P| = |PQ|$ mit $Q \neq Q'$.

Wir betrachten den Punkt X, so dass $\psi(X) = P$. Dann ist $X\psi(X)$ eine invariante Gerade von ψ durch den Punkt P, d.h. $X\psi(X)$ ist die Gerade PQ. Da $|XP| = |\psi(X)\psi(P)| = |PQ|$ folgt, dass $X = Q'$. (Offensichtlich ist $X \neq Q$, denn sonst wäre S eine Punktspieglung, deren Fixpunkt der Mittelpunkt von PQ ist. Das ist nach 12 nicht möglich.) Wenn wir die Gleichung $\sigma(Q) = Q'$ mit ψ multiplizieren, so folgte $\phi(Q) = P$. Da andererseits $\phi(P) = Q$, wäre ϕ eine Punktspieglung und hätte einen Fixpunkt. Das widerspricht der Tatsache, dass ϕ keinen Fixpunkt besitzt. Also kann der zweite Fall nicht auftreten. *Q.E.D.*

Es sei h die Parallele zu PP' durch den Punkt Q und es sei l die Parallele zu PQ durch den Punkt P'. Dann gilt:

$$\phi(Q) = h \cap l.$$

In der Tat, nach Satz 13 gilt:

$$PQ \parallel \phi(P)\phi(Q), \quad \text{und} \quad P\phi(P) \parallel Q\phi(Q).$$

Letzteres ist richtig, da zwei ϕ-invariante Geraden parallel sind.

Mit den obigen Bezeichnungen ist klar, dass $\phi = \overrightarrow{PP'}$.

Satz 14 *Es seien ϕ und ψ Translationen. Dann ist $\phi \circ \psi$ eine Translation. Es gilt:*

$$\phi \circ \psi = \psi \circ \phi.$$

Beweis: Wir können voraussetzen, dass weder ϕ noch ψ die identische Transformation ist.

Fall 1: Wir nehmen zunächst an, dass die invarianten Geraden von ϕ und ψ nicht parallel sind.

Wir wählen einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{E}$. Wir setzen:

$$\phi(P) = Q \quad \text{und} \quad \psi(P) = R.$$

Es sei g die Parallele zu PR durch Q und h die Parallele zu PQ durch R. Dann sind g und h nach Voraussetzung nicht parallel. Nach obiger Konstruktion sind sowohl $\psi(Q)$ als auch $\phi(R)$ gleich dem Schnittpunkt T der Geraden g und h. Also sind diese Punkte gleich:

$$\psi \circ \phi(P) = \phi \circ \psi(P).$$

Da dies für alle Punkte P gilt, sind ϕ und ψ vertauschbar.

Wir zeigen jetzt, dass $\phi \circ \psi$ eine Translation ist. Die Translation ϕ (bzw, ψ) bildet eine Gerade in eine dazu parallele Gerade ab. Damit gilt das gleiche auch für $\phi \circ \psi$. Das Bild der Geraden $l = PT$ bei $\phi \circ \psi$ ist also parallel zu l und enthält den Punkt $T = \phi \circ \psi(P)$. Also gilt $\phi \circ \psi(l) = l$. Wenn $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ ist, so ist das eine Translation. Wir müssen beweisen, dass sonst $\phi \circ \psi$ keinen Fixpunkt auf l besitzt. Angenommen es gäbe eine Fixpunkt auf l. Dann dürften wir annehmen, dass dies der Punkt P ist und folglich $T = P$. Also wäre $\psi(Q) = T = P$ und folglich PQ eine ψ-invariante Gerade. Da dies auch eine ϕ-invariante Gerade ist, widerspräche das der Annahme, dass die invarianten Geraden von ψ und ϕ nicht parallel sind. Also hat $\phi \circ \psi$ keinen Fixpunkt auf l und ist daher eine Translation.

*B*emerkung: Die Gerade l ist weder parallel zu den invarianten Geraden von ϕ noch zu den invarianten Geraden von ψ.

Fall 2: Schliesslich betrachten wir den Fall, wo die invarianten Geraden von ϕ und ψ die gleichen sind. Dann hat auch $\phi \circ \psi$ diese Geraden als invariante Geraden. Angenommen es gäbe einen Fixpunkt P auf einer invarianten Gerade g:

$$\phi \circ \psi(P) = P. \tag{10}$$

Wir wählen einen Punkt Q ausserhalb der Geraden g. Man hätte nach obiger Konstruktion ein Parallelogramm:

$$P\psi(P)\psi(Q)Q.$$

Dann zeigte (10), dass $\phi(\psi(Q)) = Q$. Also wäre in diesem Fall $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ eine Translation. Wenn $\phi \circ \psi$ aber keinen Fixpunkt auf l besitzt, ist es nach Definition eine Translation. Es bleibt noch zu beweisen, dass

$$\phi \circ \psi = \psi \circ \phi. \tag{11}$$

Dazu wählen wir eine Translation χ, deren invariante Geraden nicht parallel zu denen von ϕ und ψ ist. Nach der obigen Bemerkung sind dann auch die invarianten Geraden von ϕ und $\chi \circ \psi$ nicht parallel. Daher finden wir nach Fall 1 und der Assoziativität des Kompositums von Abbildungen:

$$\begin{array}{rcl} \chi \circ (\phi \circ \psi) & = & (\chi \circ \phi) \circ \psi = \quad (\phi \circ \chi) \circ \psi \\ & = & \phi \circ (\chi \circ \psi) = \quad (\chi \circ \psi) \circ \phi \\ = \chi \circ (\psi \circ \phi) & & \end{array}$$

Da χ bijektiv ist folgt daraus die gewünschte Gleichung (11). *Q.E.D.*.

Für zwei Translationen T und S gilt:

$$T \circ S = S \circ T. \tag{12}$$

Bei Translationen bezeichnet man das Kompositum oft mit $+$ statt mit $\circ$.

$$S + T = S \circ T$$

Die Identität id ist eine Translation. Sie wird auch als Nullvektor bezeichnet:

$$\mathrm{id} = \vec{0}$$

Mit dieser Bezeichnung gilt:

$$T + \vec{0} = T.$$

Für drei beliebige Punkte P, Q, R gilt:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

Hier sind P, Q, R drei beliebige Punkte.

Man kann eine Translation folgendermaßen charakterisieren:

Eine Bewegung T ist eine Translation, wenn es einen Strahl s gibt, so dass

$$T(s) \subset s \tag{13}$$

Das folgt unmittelbar aus Satz 7.

Satz 15 *Es sei ϕ eine Bewegung und T eine Translation. Dann ist $\phi \circ T \circ \phi^{-1}$ eine Translation.*

Beweis: Es gibt einen Strahl s mit $T(s) \subset s$. Es sei $t = \phi(s)$. Das ist wieder ein Strahl. Wir finden:

$$\phi \circ T \circ \phi^{-1}(t) = \phi \circ T(s) \subset \phi(s) = t$$

Also lässt die Bewegung $\phi \circ T \circ \phi^{-1}$ den Strahl t invariant und ist folglich eine Translation. *Q.E.D.*

Man kann auch Winkel zwischen Strahlen betrachten, die nicht notwendig den gleichen Anfangspunkt haben. Es sei (s, A) ein Strahl mit dem Anfangspunkt A und (t, B) ein Strahl mit dem Anfangspunkt B. Dann gibt es genau eine Translation, so dass $T(B) = A$. Die Strahlen s und $T(t)$ haben folglich den gleichen Anfangspunkt A. Wir definieren:

$$\sphericalangle(s, t) = \sphericalangle(s, T(t)).$$

Wenn U eine beliebige Translation ist, so gilt:

$$\sphericalangle(U(s), U(t)) = \sphericalangle(s, t). \tag{14}$$

In der Tat, es sein $U(A) = A'$ und $U(B) = B'$. Dann gilt:

$$T(A') = T \circ U(A) = U \circ T(A) = U(B) = B'.$$

Daher gilt nach Definition:

$$\begin{array}{rcl} \sphericalangle(U(s), U(t)) & = & \sphericalangle(U(s), T \circ U(t)) = \\ \sphericalangle(U(s), U \circ T(t)) & = & \sphericalangle(s, T(t)) = \sphericalangle(s, t) \end{array}$$

Die vorletzte Gleichung gilt wegen (6), da die Strahlen s und $T(t)$ den gleichen Anfangspunkt besitzen.

Satz 16 *Es seien r, s, t drei Strahlen, die nicht notwendig den gleichen Anfangspunkt besitzen. Dann gilt die Gleichung*

$$\sphericalangle(r, s) + \sphericalangle(s, t) = \sphericalangle(r, t)$$

Insbesondere gilt:

$$\sphericalangle(s, t) = -\sphericalangle(t, s)$$

Wenn ϕ eine Bewegung ist, so gilt

$$\sphericalangle(\phi(s), \phi(t)) = \sphericalangle(s, t)$$

Beweis: Wir wissen das bereits wenn die Anfangspunkte aller Strahlen die gleichen sind. Es sei A der Anfangspunkt von r, B der Anfangspunkt von s, C der Anfangspunkt von t. Es gibt genau eine Translation T, so dass $T(B) = A$ und genau eine Translation U, so dass $U(C) = B$. Dann gilt nach Definition:

$$\begin{array}{rcl} \sphericalangle(r,s) + \sphericalangle(s,t) & = & \sphericalangle(r,T(s)) + \sphericalangle(s,U(t)) = \\ \sphericalangle(r,T(s)) + \sphericalangle(T(s),T\circ U(t)) & = & \sphericalangle(r,T\circ U(t)) = \sphericalangle(r,t) \end{array}$$

Die zweite Gleichung gilt nach (14). Die übrigen Gleichungen gelten nach (2).

Wir beweisen jetzt die letzte Behauptung des Satzes. Aus der Gleichung $U(C) = B$ folgern wir, dass $\phi \circ U \circ \phi^{-1}(\phi(C)) = \phi(B)$. Nach Satz 15 wissen wir bereits, dass $U_1 = \phi \circ U \circ \phi^{-1}$ eine Translation ist. Daher gilt nach Definition des Drehwinkels:

$$\sphericalangle(\phi(s),\phi(t)) = \sphericalangle(\phi(s),U_1\circ\phi(t)) = \sphericalangle(\phi(s),\phi\circ U(t)) = \sphericalangle(s,U(t)) = \sphericalangle(s,t).$$

Dabei gilt die dritte Gleichung nach (6). *Q.E.D.*

Definition 17 *Es sei ϕ eine Bewegung. Dann definieren wir den Drehwinkel $\vartheta(\phi)$. Wir wählen einen beliebigen Strahl und setzen:*

$$\vartheta(\phi) = \sphericalangle(\phi(s),s)$$

Man muss diese Definition rechtfertigen, indem man zeigt, dass die rechte Seite der Gleichung unabhängig von dem gewählten Strahl s ist. In der Tat, es sei t ein zweiter Strahl. Dann finden wir nach Satz 16:

$$\sphericalangle(\phi(s),s) + \sphericalangle(s,t) + \sphericalangle(t,\phi(t)) = \sphericalangle(\phi(s),\phi(t)) = \sphericalangle(s,t)$$

Da sich $\sphericalangle(s,t)$ herauskürzt, finden wir die gesuchte Gleichung

$$\sphericalangle(\phi(s),s) = \sphericalangle(\phi(t),t)$$

Satz 18 *Es seien ϕ und ψ zwei Bewegungen. Dann gilt:*

$$\vartheta(\phi\circ\psi) = \vartheta(\phi) + \vartheta(\psi). \tag{15}$$

Eine Bewegung ϕ ist genau dann eine Translation, wenn $\vartheta(\phi) = 0$.

Beweis: Wir wählen einen Strahl s. Dann gilt $\vartheta(\psi) = \sphericalangle(\psi(s), s)$. Wenn wir in der Definition von ϑ den Strahl $\psi(s)$ benutzen, so finden wir:

$$\vartheta(\phi) = \sphericalangle(\phi \circ \psi(s), \psi(s))$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vartheta(\phi) + \vartheta(\psi) &= \sphericalangle(\phi \circ \psi(s), \psi(s)) + \sphericalangle(\psi(s), s) = \\ \sphericalangle(\phi \circ \psi(s), s) &= \vartheta(\phi \circ \psi) \end{aligned}$$

Die letzte Behauptung des Satzes folgt unmittelbar aus Satz 15. *Q.E.D.*

Ein *Fixpunkt* einer Bewegung ϕ ist ein Punkt $F \in \mathbb{E}$, so dass

$$\phi(F) = F$$

Die einzige Translation, die einen Fixpunkt hat ist die Translation id.

Satz 19 *Jede Bewegung der Ebene ist eine Translation oder eine Drehung.*

Beweis: Es sei ϕ eine Bewegung. In dem Fall, wo es eine Gerade g gibt, so dass g und $\phi(g)$ nicht parallel sind, ist ϕ nach Lemma 10 eine Drehung.

Schließlich betrachten wir den Fall, wo g und $\phi(g)$ stets parallel sind. Wir finden eine Translation T, so dass $T \circ \phi = \psi$ einen Fixpunkt hat. Dann sind auch g und $\psi(g)$ immer parallel. Daher muss ψ eine Drehung um 180° sein. Es sei F ihr Fixpunkt. Es sei h eine invariante Gerade von T, die durch F geht. Man findet einen Punkt $P \in h$, so dass F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PT(P)}$ ist. Dann findet man

$$\phi(P) = T^{-1} \circ \psi(P) = T^{-1}(T(P)) = P.$$

Folglich hat ϕ einen Fixpunkt und ist damit eine Drehung. *Q.E.D.*

Satz 20 *Wir fixieren einen Punkt F und schreiben $D(\phi) = D(F, \phi)$. Es sei $T = \overrightarrow{PQ}$ eine Translation. Es sei $D(\phi)(P) = P_1$ und $D(\phi)(Q) = Q_1$. (Man kann $\overrightarrow{P_1Q_1}$ als die Drehung des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ um $D(\phi)$ auffassen.) Dann gilt:*

$$D(\phi) \circ \overrightarrow{PQ} \circ D(-\phi) = \overrightarrow{P_1Q_1}.$$

Die letzte Formel schreibt man auch symbolisch:

$$D(\phi) \circ T \circ D(-\phi) = D(\phi)(T).$$

Bemerkung: Wenn man (15) auf die linke Seite dieser Formel anwendet, sieht man sofort, dass die linke Seite eine Translation ist.

Neben den Bewegungen postulieren wir noch die Existenz einer zweiten Art von Isometrien.

Prinzip 21 *Es sei g eine Gerade der Ebene $\mathbb{E}$. Es seien H^+ und H^- die beiden Halbebenen, die durch g bestimmt werden. Dann gibt es eine Isometrie $s_g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ der Ebene mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $s_g(P) = P, \quad$ *für alle* $P \in g$

(ii) $s_g(H^+) = H^-$ *und* $s_g(H^-) = H^+$

(iii) Für zwei beliebige Strahlen t_1 und t_2 mit dem gleichen Anfangspunkt gilt

$$\sphericalangle(s_g(t_1), s_g(t_2)) = -\sphericalangle(t_1, t_2)$$

Wir nennen s_g die Spieglung an der Geraden g.

Eine Spieglung erhält also nicht wie eine Bewegung die Drehwinkel, sondern ersetzt sie durch ihr Negatives. Das entspricht der Tatsache, dass das Spiegelbild einer Linksdrehung eine Rechtsdrehung ist. Für zwei Punkte P und Q gilt

$$|PQ| = |s_g(P)s_g(Q)|.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass s_g eine Isometrie ist.

Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis, dessen Mittelpunkt M auf g liegt. Da M bei s_g invariant ist, ist auch der Kreis $\mathcal{K}$ invariant:

$$s_g(\mathcal{K}) = \mathcal{K}.$$

Diese Eigenschaft kann man ausnutzen, um das Spiegelbild eines Punktes P bei s_g zu konstruieren. Es sei $P \in H^+$ (oder $\in H^-$). Man wählt zwei beliebige Punkte M_1 und M_2 auf g. Man zeichnet den Kreis $\mathcal{K}_1$ durch P mit dem Mittelpunkt M_1 und den Kreis $\mathcal{K}_2$ durch P mit dem Mittelpunkt M_2. Da die Kreise bei s_g invariant sind, muss $s_g(P)$ ein Schnittpunkt der Kreise $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ sein. Da die Punkte P und $s_g(P)$ in verschiedenen Halbebenen liegen und nicht zu g gehören, sind sie die einzigen Schnittpunkte von $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$. Also findet man den Punkt $s_g(P)$ als weiteren Schnittpunkt dieser Kreise.

Man kann natürlich genauso gut mit dem Punkt $Q = s_g(P)$ beginnen. Dann zeigt unsere Konstruktion, dass für eine Spieglung:

$$s_g^2 := s_g \circ s_g = \mathrm{id}\,.$$

Lemma 22 *Es sei P ein Punkt, der nicht auf der Geraden g liegt. Dann gilt:*

$$Ps_g(P) \textit{ ist orthogonal zu } g, \quad \textit{für alle } P \notin g$$

Beweis: Es sei F der Schnittpunkt von $Ps_g(P)$ mit g. Es sei u der Strahl FP. Dann ist $Fs_g(P)$ der Strahl $-u$. Es sei t ein Strahl mit dem Anfang F, der auf g liegt. Da s_g Drehwinkel auf ihr negatives abbildet, erhalten wir:

$$\sphericalangle(u,t) = -\sphericalangle(s_g(u), s_g(t)) = -\sphericalangle(-u,t). \tag{16}$$

Andererseits gilt:

$$\sphericalangle(-u,t) + \sphericalangle(t,u) = 180^0 \text{ oder } \sphericalangle(-u,t) = 180^0 + \sphericalangle(u,t)$$

Aus der Gleichung (16) erhält man

$$\sphericalangle(u,t) = -180^0 - \sphericalangle(u,t)$$

Damit ergibt sich (da $180^0 = -180^0$)

$$2\sphericalangle(u,t) = 180^0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $\sphericalangle(u,t) = 90^0$ oder $\sphericalangle(u,t) = -90^0$. Also sind die beiden Strahlen s und t orthogonal, d.h. der geometrische Winkel zwischen ihnen hat 90^0. *Q.E.D.*

Unter einer orientierten Strecke $\overline{AB}$ verstehen wir eine Strecke mit einem gewählten Anfangspunkt und einer gewählten Seite der Geraden AB. Wenn wir B als Anfangspunkt gewählt haben, wollen wir stets $\overline{BA}$ schreiben.

$$A \overset{\uparrow}{\longrightarrow} B$$

Satz 23 *Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei orientierte Strecken. Dann gibt es genau eine Isometrie σ, die die orientierte Strecke $\overline{AB}$ auf die orientierte Strecke $\overline{CD}$ abbildet.*

Wir wissen, dass es stets eine Bewegung ϕ gibt, so dass $\phi(A) = C$ und $\phi(B) = D$. Wenn ϕ die gewählten Seiten der Geraden AB und CD respektiert, so ist $\phi = \sigma$. Wir sagen dann auch σ ist orientierungserhaltend.

Im anderen Fall kann σ keine Bewegung sein. Dann heißt σ orientierungsumkehrend. Man setzt:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{or}(\sigma) = 1 & \text{wenn } \sigma \text{ eine Bewegung} \\ \mathrm{or}(\sigma) = -1 & \text{wenn } \sigma \text{ keine Bewegung} \end{array}$$

Für zwei Isometrie σ und τ gilt:

$$\mathrm{or}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{or}(\sigma) \cdot \mathrm{or}(\tau)$$

Es sei g eine Gerade und $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine Translation in Richtung g. Dann ist für alle $P \in g$ auch $T(P) \in g$. Wir sagen auch g ist eine *invariante Gerade* von T und schreiben $T(g) = g$.

Wenn $T \neq id$ so nennt man das Kompositum

$$\tau = T \circ s_g = s_g \circ T$$

eine *Gleitspieglung*. Die Gerade g nennt man die Achse der Gleitspieglung τ. Es ist die einzige invariante Gerade von τ. Eine Gleitspieglung kann keinen Fixpunkt haben. Dagegen hat die Spieglung $\tau = s_g$, jeden Punkt von g als Fixpunkt und jede Gerade, die senkrecht auf g steht als invariante Gerade.

Satz 24 *Eine Isometrie $\tau : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, die keine Bewegung ist (d.h. $\mathrm{or}(\tau) = -1$), ist eine Gleitspieglung.*

Satz 25 *(Hjemslev) Es sei τ eine Bewegung der Ebene. Es sei g eine Gerade. Dann liegen die Mittelpunkte aller Strecken $\overline{P\tau(P)}$, so $P \in g$, auf einer Geraden.*

Man kann das auch so formulieren: Es seien g und g' zwei Geraden. Es seien $A, B, C \in g$ und $A', B', C' \in g'$ Punkte, so dass $|AB| = |A'B'|, |AC| = |A'C'|$ und $|BC| = |B'C'|$. Dann liegen die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ auf einer Geraden.

Beweis (Kurzform): Es gibt eine Gleitspieglung τ, so dass $\tau(A') = A$ und $\tau(B') = B$ (siehe Zusammenfassung). Es sei m die Achse der Gleitspieglung τ. Nach Definition einer Gleitspieglung liegen die Mittelpunkte von $\overline{AA'}$, und $\overline{BB'}$ auf der Geraden M.

Wir setzen $\tau(C') = C_1$. Da τ eine Isometrie ist, also die Längen von Strecken erhält, gilt:

$$|C_1A| = |C'A'| = |CA| \quad \text{und} \quad |C_1B| = |C'B'| = |CB|$$

Daraus sieht man, dass $C = C_1$. Also ist $\tau(C') = C$ und der Mittelpunkt von $\overline{CC'}$ liegt auf m.

3 Kongruenzsätze

Wir schicken einige Bemerkungen über Drehwinkel und Winkel voraus.

$\sphericalangle ABC$ ist der Drehwinkel der Drehung, die den Strahl BC nach BA dreht. Das ist eine Zahl α mit $0° \leq \alpha < 360°$.

Wir bezeichnen mit $< ABC$ den (gewöhnlichen) Winkel, wie ihn Euklid benutzt. Er ist wie folgt definiert: $< ABC$ ist eine Zahl $\bar{\alpha}$ mit $0° \leq \bar{\alpha} \leq 180°$. Man setzt $\bar{\alpha} = \alpha$ wenn $\alpha \leq 180°$ und $\bar{\alpha} = 360 - \alpha$, wenn $\alpha \geq 180°$. Es gilt $< ABC =< CBA$ aber $\sphericalangle ABC = -\sphericalangle CBA$.

Formeln:

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD = \sphericalangle ABD.$$

Für 3 Punkte ABC gilt (Winkelsumme im Dreieck):

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB = 180° \qquad \text{(Beweis)}$$

Verhalten bei Anwendung einer Isometrie:

$$\sphericalangle\sigma(A)\sigma(B)\sigma(C) = \sphericalangle ABC, \text{ wenn } or(\sigma) = 1$$

$$\sphericalangle\sigma(A)\sigma(B)\sigma(C) = -\sphericalangle ABC, \text{ wenn } or(\sigma) = -1.$$

Gewöhnliche Winkel bleiben dagegen bei beliebigen Isometrien σ erhalten:

$$\angle\sigma(A)\sigma(B)\sigma(C) = \angle ABC$$

Definition 26 *Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heißen kongruent, wenn es eine Isometrie σ gibt, so dass*

$$\sigma(A) = A', \quad \sigma(B) = B' \text{ und } \sigma(C) = C'.$$

Dann gilt:

$$|AB| = |A'B'|, \quad |AC| = |A'C'|, \quad |BC| = |B'C'|$$

$$\angle ABC = \angle A'B'C', \quad \angle BCA = \angle B'C'A', \quad \angle CAB = \angle C'A'B'.$$

Satz 27 *(SSS): Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, so dass $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $|BC| = |B'C'|$. Dann gibt es eine Isometrie σ, so dass*

$$\sigma(A) = A', \ \sigma(B) = B' \ \text{ und } \sigma(C) = C'.$$

Satz 28 *(SWS): Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, so dass $|AB| = |A'B'|$, $|CB| = |C'B'|$ und $\angle ABC = \angle A'B'C'$.*

Dann gibt es eine Isometrie σ mit $\sigma(A) = A'$ $\sigma(B) = B'$ und $\sigma(C) = C'$.

Korollar 29 *(Eselsbrücke) Es sei ABC ein Dreieck. Wenn $\angle CAB = \angle CBA$, so gilt $|CA| = |CB|$. Wenn umgekehrt $|CA| = |CB|$ so gilt $\angle CAB = \angle CBA$. (Beweis)*

Für die Drehwinkel gilt $\sphericalangle CAB = -\sphericalangle CBA$.

4 Vierecke

Definition 30 *Vier verschiedene Punkte $ABCD$, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, bilden ein Viereck, wenn die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ in dieser Reihenfolge einen Streckenzug ohne Überschneidungen bilden.*

D.h. die Strecke $\overline{AB}$ hat mit den übrigen drei Strecken als gemeinsame Punkte nur den gemeinsamen Punkt A mit der Strecke DA und den gemeinsamen Punkt B mit der Strecke BC. Diese Forderung für $\overline{AB}$ soll entsprechend auch für $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ gelten.

Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ nennt man die Diagonalen des Vierecks. Mindestens eine der folgenden beiden Möglichkeiten liegt stets vor:

1) Die Gerade BD schneidet die Strecke $\overline{AC}$.

2) Die Gerade AC schneidet die Strecke $\overline{BD}$.

In der Tat: Angenommen die Strecke $\overline{BD}$ schneidet die Gerade AC nicht. Dann liegen B und D auf der gleichen Seite von AC. Eins der Dreiecke

ACB und ACD muß innerhalb des anderen liegen. Angenommen D liegt innerhalb von ABD. Dann muss die Verbindungsgerade von die Gerade BD die gegenüberliegende Seite $\overline{AC}$ treffen. Damit liegt dann der erste Fall vor.

Definition 31 *Es sei $\mathcal{F}$ eine Figur in der Ebene. Eine Symmetrie von $\mathcal{F}$ ist eine Isometrie $\sigma : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, so dass $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.*

Parallelogramm:

Definition 32 *Ein Viereck $ABCD$ heißt Parallelogramm, wenn $AB \parallel CD$ und $BC \parallel DA$.*

Durch eine Parallelverschiebung erkennt man leicht, dass

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180^\circ \\
&\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD
\end{aligned}$$

Weitere Gleichungen erhält man durch zyklische Vertauschung der Punkte $ABCD$.

Man betrachtet die Bewegung ρ, so dass $\rho(A) = C$ und $\rho(B) = D$. Das ist eine Drehunng um 180°. Also gilt $\rho^2 = 1$. Die Punktspieglung ρ bildet die Diagonalen auf sich ab. Daher ist der Schnittpunkt M der Diagonalen der Fixpunkt von ρ. Es folgt, dass M jede der Diagonalen halbiert:

$$|AM| = |CM|, \quad |DM| = |BM|.$$

Man nennt M den Mittelpunkt des Parallelogramms.

Aus den Eigenschaften der Translationen folgt, dass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

$$|AB| = |CD|, \quad |DA| = |BC|.$$

Man zeigt leicht, dass id und ρ die einzigen Symmetrien eines Parallelogramms sind, das kein Rechteck oder Rhombus ist.

Es sei $ABCD$ ein Viereck mit $|AB| = |CD|$ und $AB \parallel CD$. Dann ist $ABCD$ ein Parallelogramm. In der Tat, diese beiden Eigenschaften zeigen bereits, dass es die Punktspieglung ρ gibt.

Satz 33 *Es sei $ABCD$ ein Viereck mit $|AB| = |CD|$ und $|AD| = |BC|$. Dann ist dies ein Parallelogramm.*

Beweis: Man kann annehmen, dass B und D auf verschiedenen Seiten der Gerade AC liegen. Da die Dreiecke ABC und CDA kongruent sind (SSS), gibt es eine Isometrie ρ,so dass

$$\rho(A) = C, \quad \rho(B) = D, \quad \rho(C) = A.$$

Also kann ρ nur die Spieglung an der Mittelsenkrechten von AC oder die Punktspieglung um den Mittelpunkt von AC sein. Es kommt aber nur der letztere Fall in Frage, da ρ die Seiten der Geraden AC vertausschen muß. Hier benutzen wir die Annahme am Anfang. Da eine Punktspieglung eine Gerade auf eine dazu parallele Gerade abbildet folgt die Behauptung.

Rechteck:

Definition 34 *Ein Rechteck ist ein Parallelogramm $ABCD$, dessen Winkel $90°$ haben:*

$$\angle CAB = \angle ABD = \angle BDC = \angle CDA = 90° \tag{17}$$

Es genügt, dass einer der Winkel $90°$ hat. Das sieht man aus den Eigenschaften der Winkel in einem Parallelogramm.

Da die Dreiecke ABD und BAC nach (SWS) kongruent sind, gibt es eine Isometrie σ, so dass $\sigma(A) = B$, $\sigma(B) = A$ und $\sigma(D) = C$. Da σ die Seiten der Geraden AB respektiert muss σ die Spieglung um die Mittelsenkrechte von AB sein. Weil $\sigma(D) = C$ ist, fällt diese Mittelsenkrechte mit der von CD zusammen. Das ist die Achse von σ.

Da *sigma* die beiden Diagonalen vertauscht, sind die Diagonalen in einem Rechteck gleich lang. Der Schnittpunkt M der Diagonalen muss daher auf der Achse von σ liegen. Wir sehen nochmal, dass M beide Diagonalen halbiert.

Satz 35 *Es sei $ABCD$ ein Rechteck und es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann gilt:*

$$|MA| = |MB| = |MC| = |MD| \tag{18}$$

Symmetrien des Rechtecks: Die Identität, die Spiegelungen um die Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$, die Punktspiegelung um den Mittelpunkt M.

Satz 36 *(Thales rückwärts):*
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse AC. Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Dann gilt $|MB| = |MA| = |MC|$.

Beweis: Die Punktspiegelung ρ an M bildet B auf $D = \rho(B)$ ab. Da eine Punktspieglung jede Gerade auf eine zur ihr parallele Gerade abbildet ist $ABCD$ ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel. Die Behauptung folgt aus (18). *Q.E.D.*

Satz 37 *(Thales vorwärts): Es sei ABC ein Dreieck und M der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Wenn $|MB| = |MA| = |MC|$, so ist $\angle ABC$ ein rechter Winkel.*

Beweis: Die Punktspieglung ρ an M liefert ein Parallelogramm $ABCD$ mit zwei gleich langen Diagonalen ($D = \rho(B)$). Dann sind die Dreiecke CDB und BAC kongruent. Wir finden eine Isometrie s mit $s(C) = B$, $s(D) = A$ und $s(B) = C$. Dann muss s die Spieglung um die Mittelsenkrechte von BC sein. Also ist $ABCD$ ein Rechteck. *Q.E.D.* Der Beweis zeigt die folgende äquivalente Formulierung.

Korollar 38 *Ein Parallelogramm, dessen Diagonalen gleich lang sind ist ein Rechteck.*

Drachenviereck:

Definition 39 *Ein Viereck $ABCD$ heißt ein Drachenviereck, wenn*

$$|AB| = |AD|, \quad |CB| = |CD|.$$

Man sieht, dass AC die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BD}$ ist. Folglich ist die Spieglung an der Achse AC eine Symmetrie des Drachenvierecks. Bemerkung: Alles was durch zyklische Vertauschung der Bezeichnungen $ABCD$ entsteht, sehen wir ebenfalls als Drachenviereck an.

Die Existenz der Spieglung s zeigt:

1) Die Winkel bei B und D sind gleich.
2) $\overline{AC}$ steht senkrecht auf $\overline{BD}$
3) $\overline{AC}$ halbiert $\overline{BD}$.
4) $\overline{AC}$ halbiert die Winkel bei A und C.

Symmetrien: s_{AC}.

Rhombus: Alle vier Seiten gleich lang. Ein Rhombus ist gleichzeitig Parallelogramm und Drachenviereck.

Quadrat: Ist gleichzeitig Rhombus und Rechteck.

Kreisviereck: Ein Viereck $ABCD$ heisst Kreisviereck, wenn es einen Kreis K gibt, der durch die Punkte $ABCD$ geht. Nach Korollar 69 ist die Summe zweier gegenüberliegender geometrischer Winkel gleich 180°.

Ist umgekehrt die Summe je zweier gegenübeliegender geometrischer Winkel gleich 180° so ist das Viereck $ABCD$ ein Kreisviereck. Wie am Anfang des Abschnitts erklärt, kann man annehmen, dass die Punkte B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden AC liegen. Daher folgt der Sachverhalt aus der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes.

5 Ähnlichkeit

5.1 Das Teilverhältnis, die Strahlensätze

Es sei g eine Gerade. Man kann g mit einem Maßstab versehen. Dadurch wird jedem Punkt P der Geraden eine reelle Zahl $x(P)$ zugeordnet. Anschaulich heißt das, dass man ein Lineal mit einem Maßstab an die Gerade anlegt. Ein Maßstab x ist eindeutig durch die Punkte P_0 und P_1 festgelegt, so dass $x(P_0) = 0$ und $x(P_1) = 1$. Man nennt P_0 den Ursprung des Maßstabs.

Wenn y ein weiterer Maßstab auf der Geraden g ist, so gibt es reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, wo $a \neq 0$, derart dass

$$y(P) = ax(P) + b$$

Es seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden g. Das Teilverhältnis

$$\frac{CA}{CB}$$

ist folgendermaßen definiert. Man wählt einen Maßstab x auf der Geraden g. Dann ist

$$\frac{CA}{CB} = \frac{x(C) - x(A)}{x(C) - x(B)}$$

Das ist eine reelle Zahl λ, so dass $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$.

Wir fixieren jetzt die Punkte A und B. Dann gibt es umgekehrt zu jeder reellen Zahl λ, so dass $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$ genau eine Punkt C der Geraden AB mit

$$\frac{CA}{CB} = \lambda.$$

Es gilt:

$$|CA| = |\lambda||CB|$$

Die Zahl λ ist positiv, wenn C ausserhalb der Strecke $\overline{AB}$ liegt und negativ, wenn C innnerhalb der Strecke liegt.

Angenommen wir haben die Punkte A und B auf der Geraden fixiert. Dann gibt es zu jeder reellen Zahl $\lambda \neq 1$ genau einen Punkt C mit:

$$\lambda = \frac{CA}{CB}$$

Man kann sich die Punkte C auf der Geraden g durch die Zahlen $\lambda = \lambda(C)$ parametrisiert vorstellen.

Definition 40 *Eine bijektive Abbildung $f : g \to g'$ zweier Geraden g und g' heißt affin, wenn für beliebige verschiedene Punkte $A, B, C \in g$ gilt, dass*

$$\frac{f(C)f(A)}{f(C)f(B)} = \frac{CA}{CB}$$

Eine einfache Verifikation zeigt:

Korollar 41 *Das Kompositum von zwei affinen Abbildungen ist wieder eine affine Abbildung.*

Beispiel: *Die Parallelprojektion.* Es seien g und g' zwei Geraden. Es sei h eine weitere Gerade, die weder zu g noch zu g' parallel ist. Man nennt h die Projektionsrichtung. Dann definiert man eine Abbildung $f : g \to g'$ wie folgt. Es sei $A \in g$. Man zieht die Parallele h_A zu h durch den Punkt A. Man definiert $f(A) = h_A \cap g'$ als den Schnittpunkt der Geraden h_A und der Geraden g'.

Satz 42 *(1. Strahlensatz) Die Parallelprojektion ist eine affine Abbildung.*

Die Richtigkeit dieses Satzes entnehmen wir der Anschauung.

Beispiel: Eine Isometrie $f : g \to g'$ ist eine affine Abbildung. Wir erinnern daran, dass eine Isometrie dadurch charakterisiert ist, dass für zwei beliebige Punkte $A, B \in g$

$$|f(A)f(B)| = |AB|$$

gilt. Also erhält f Teilverhältnisse zumindestens bis auf das Vorzeichen. Man sieht aber leicht, dass f die Strecke $\overline{AB}$ auf die Strecke $\overline{f(A)f(B)}$ abbildet. Deshalb wird auch das Vorzeichen von Teilverhältnissen respektiert.

Satz 43 *Es seien g und g' zwei Geraden. Es seien P_0, P_1 zwei verschiedene Punkte auf g und P_0' und P_1' zwei verschiedene Punkte auf g'.*

Dann gibt es genau eine affine Abbildung $f : g \to g'$, so dass $f(P_0) = P_0'$ und $f(P_1) = P_1'$.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit von f. Es sei Q ein weiterer Punkt von g, der von P_0 und P_1 verschieden ist. Dann gilt:

$$\frac{QP_1}{QP_0} = \frac{f(Q)P_1'}{f(Q)P_0'}.$$

Da wir die linke Seite dieser Gleichung kennen, ist $f(Q)$ eindeutig bestimmt.

Um die Existenz zu zeigen, verschieben wir g parallel, so dass der Punkt P_0 auf den Punkt P_0' fällt. Da eine Parallelverschiebung eine affine Abbildung ist (sogar eine Isometrie), dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $P_0 = P_0'$. In diesem Fall können wir für f die Parallelprojektion von g auf g' in Richtung der Geraden P_1P_1' nehmen. *Q.E.D.*

Beispiel: Es sei ABC ein Dreieck und es sei S ein Punkt auf der Seite b. Man laufe auf einer Parallelen zu der Seite a durch S bis man zu einem Punkt S_1 auf c kommt. Genauso laufe man von S_1 parallel zu b bis man zu einem Punkt S_2 auf a. Dann laufe man parallel zu S_3 auf b. Wiederholt man den gleichen Vorgang mit S_3 an Stelle von S, so kommt man zum Punkt S zurück.

In der Tat, die Abbildung $f : b \to b$, so dass $S \mapsto S_6$ ist ein Kompositum von 6 Parallelprojektionen. Daher ist f eine affine Abbildung. Sie hat die Fixpunkte A und C und muss also mit der identischen Abbildung übereinstimmen.

Die Dehnung eines Vektors: Es sei T eine Translation der Ebene. Wir verwenden für Translation auch das Synonym Vektor. In der Vektorrechnung benutzt man für das Kompositum von Translationen das Symbol "+":

$$T + S := T \circ S$$

Die identische Translation id wird in der Vektorrechnung mit $\vec{0}$ bezeichnet. Also gilt:

$$T + \vec{0} = T = \vec{0} + T.$$

Es sei $T(A) = B$. Da die Translation T durch diese Gleichung eindeutig bestimmt ist schreibt man $T = \overrightarrow{AB}$.. Wenn A, B, C drei Punkte der Ebene sind, so hat man die Gleichung:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Eine weitere suggestive Notation der Vektorrechnung ist:

$$A + T := T(A).$$

Dann kann man schreiben:

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$

Wenn $T \neq \mathrm{id}$, so sind die Punkte A und B verschieden. Es gibt auf der Geraden $g = AB$ einen eindeutig bestimmten Maßstab x, so dass $x(A) = 0$ und $x(B) = 1$.

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann gibt es genau einen Punkt $B_\lambda \in g$, so dass $x(B_\lambda) = \lambda$.

Definition 44 *Die Streckung des Vektors T um den Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Translation S, so dass*

$$S = \overrightarrow{AB_\lambda}.$$

Wir schreiben $S = \lambda \cdot T$. Wenn $T = \vec{0}$, so definieren wir $S = \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0}$.

Man kann mit dem Strahlensatz sehen, dass diese Definition nicht von dem oben gewählten Punkt A abhängt.

Es seien $S \neq \vec{0}$ und $T \neq \vec{0}$. Wenn eine Zahl λ existiert, so dass $\lambda \cdot T = S$, so nenen wir die Vektoren S und T parallel. Das ist genau dann der Fall, wenn die invarianten Geraden von T und S die gleichen sind. Wenn wir parallele Vektoren haben, so schreiben wir den Faktor λ als Bruch:

$$\lambda = \frac{S}{T}.$$

Wenn S und T nicht parallel sind, so ist ein solcher Bruch sinnlos.

Für Vektoren T, S, R und Zahlen $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln. Wir benutzen hier die Abkürzung $\lambda \cdot T = \lambda T$.

$$\begin{aligned} S + T &= T + S \\ (R + S) + T &= R + (S + T) \\ T + \vec{0} &= T \\ 0 \cdot T &= \vec{0} \\ \lambda \vec{0} &= \vec{0} \\ (\lambda + \mu) T &= \lambda T + \mu T \\ \lambda (S + T) &= \lambda S + \lambda T \end{aligned} \tag{19}$$

Die letzte dieser Relationen ist äquivalent mit dem oben postulierten Strahlensatz.

Man kann das Teilverhältnis auch durch die eingeführte Vektorrechnung ausdrücken:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$$

Es $f : g \to g'$ eine affine Abbildung ist. Es seien A, B zwei Punkte von g. Es seien C und D zwei weitere Punkte von g, die jeweils von A und B verschieden sind. Mit Hife von Definition 40 verifiziert man leicht:

$$\frac{\overrightarrow{f(C)f(A)}}{\overrightarrow{f(D)f(B)}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{DB}} \tag{20}$$

Wenn man zu den Längen der Vektoren übergeht, erhält man:

$$\frac{|f(C)f(A)|}{|f(D)f(B)|} = \frac{|CA|}{|DB|}$$

Da es sich hier um positive reelle Zahlen handelt kann man diese Relation auch umschreiben:

$$\frac{|f(C)f(A)|}{|CA|} = \frac{|f(D)f(B)|}{|DB|}$$

Wir sehen, dass dieser Quotient α unabhängig von den gewählten Punkten ist:

Satz 45 *Es sei $f : g \to g'$ eine affine Abbildung von Geraden. Dann gibt es eine reelle Zahl $\alpha > 0$, so dass für zwei beliebige Punkte C und A von g gilt, dass*

$$|f(C)f(A)| = \alpha|CA|.$$

Durch zweimalige Anwendung des 1. Strahlensatzes erhält man:

Satz 46 *(2.Strahlensatz, Figur 26) Es seien g und g' zwei nicht parallele Geraden. Es sei $p : g \to g'$ eine Parallelprojektion. Es seien $A_1, A_2, A_3 \in g$ drei verschiedene Punkte. Wir setzen $p(A_i) = B_i$ und $T_i = \overrightarrow{A_iB_i}$, für $i = 1, 2, 3$. Dann gilt:*

$$\frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_1} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{A_1A_3}}$$

Beweis: Es sei h eine Gerade, die parallel zur Projektionsrichtung von p ist. Es sei $q : g' \to h$ die Parallelprojektion in der Richtung g. Wir setzen $q(B_i) = C_i$. Aus der Figur 26 liest man folgende Gleichungen ab:

$$\overrightarrow{C_1C_2} = T_2 - T_1 \quad \text{und} \quad \overrightarrow{C_1C_3} = T_3 - T_1$$

Da nach dem 1.Strahlensatz $q \circ p$ eine affine Abbildung ist und $q \circ p(A_i) = C_i$, folgt dass

$$\frac{\overrightarrow{C_1C_2}}{\overrightarrow{C_1C_3}} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{A_1A_3}}$$

Q.E.D.

Gewöhnlich formuliert man den 2.Strahlensatz in dem Fall, wo $A_1 = B_1$ der Schnittpunkt der beiden Geraden ist. Daraus lässt sich die obige allgemeinere Formulierung übrigens leicht herleiten:

Korollar 47 *(Figur 27) Es seien g und g' zwei nicht parallele Geraden, die sich in einem Punkt A schneiden. Es sei $p : g \to g'$ eine Parallelprojektion. Es seien $A_2, A_3 \in g$ zwei Punkte, die von A verschieden sind. Punkte. Wir setzen $p(A_i) = B_i$. Dann gilt*

$$\frac{\overrightarrow{A_2B_2}}{\overrightarrow{A_3B_3}} = \frac{\overrightarrow{AA_2}}{\overrightarrow{AA_3}}$$

Neben der Parallelprojektion betrachten wir die *Zentralprojektion* (Bild [2]). Sie ist im allgemeinen keine affine Abbildung. Die Zentralprojektion ist wie folgt definiert:

Es seien g und g' zwei Geraden und S ein Punkt der auf keiner der Geraden liegt. Dann definiert man $p : g \to g'$ wie folgt. Es sei $A \in g$. Das Bild $p(A)$ ist der Schnittpunkt von der Geraden SA mit g'. Man nennt p die Zentralprojektion von g auf g' mit dem Zentrum S. Man nennt S auch den Augpunkt. Die Geraden durch S heißen in dieser Terminologie die Sehstrahlen.

Wenn g und g' nicht parallel sind ist das keine richtige Abbildung. Es sei nämlich s die Parallele zu g' durch den Punkt S. Den Schnittpunkt von s mit g nennt man den Verschwindungspunkt $V \in g$. Die obige Definition für $p(V)$ ist sinnlos. Genauer sollte man daher sagen, dass

$$p : g \setminus \{V\} \to g'$$

auf der Menge aller Punkte von g definiert ist, die von V verschieden sind. Man sieht, dass es genau einen Punkt $F \in g'$ gibt, der nicht im Bild von p ist. Dieser sogenannte Fluchtpunkt F ist der Schnittpunkt der Parallelen zu g durch S mit der Geraden g'.

Wenn g und g' parallel sind, so ist die Zentralprojektion p mit dem Zentrum S überall definiert, d.h. man erhält wirklich eine Abbildung $p : g \to g'$.

Der folgende 3.Strahlensatz folgt leicht aus den Vorgängern:

Satz 48 *Es seien g und g' parallele Geraden. Es sei S ein Punkt, der zu keiner der Geraden gehört.*

Dann ist die Zentralprojektion $p : g \to g'$ mit dem Zentrum S eine affine Abbildung (Figur 28).

Korollar 49 *Es sei $ABCD$ ein Trapez mit den parallelen Seiten AB und CD. Es sei S der Schnittpunkt der Seiten BC und AD und es sei T der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Dann halbiert die Verbindungsgerade ST jeweils die Strecken AB und CD. (Figur 29)*

Beweis: Man betrachtet die Zentralprojektion mit dem Zentrum S von der Geraden AB auf die Gerade CD. Da die Abbildung affin ist, wird der Mittelpunkt von AB auf den Mittelpunkt von CD abbgebildet. Also liegt S auf der Gerade m, die den Mittelpunkt von AB mit dem Mittelpunkt von CD verbindet. Wenn wir die Zentralprojektion mit dem Zentrum T von der Gerade AB auf die Gerade CD betrachten, so sehen wir, dass auch T auf m liegt. Damit ist das Korollar bewiesen. *Q.E.D.*

Es gibt noch eine weitere wichtige Konstruktion, die zu einer affinen Abbildung führt, und die man 4.Strahlensatz nennen könnte.

Es seien g und g' verschiedene parallele Geraden. Es sei h eine weitere parallele Gerade, die von g und g' verschieden ist. Es seien $A \in g$ und $A' \in g'$ Punkte. Dann definiert man eine Abbildung $p : g \to g'$ wie folgt. Man setzt $p(A) = A'$. Es sei $B \in g$ ein anderer Punkt von g. Es sei H der Schnittpunkt der Geraden $A'B$ mit h. Es sei B' der Schnittpunkt von AH mit der Geraden g'. Wir setzen:

$$p(B) = B'.$$

Dann ist p eine affine Abbildung.

Wir geben eine Beweisskizze: Wenn h genau in der Mitte zwischen g und g' verläuft, so ist p eine Parallelprojektion. Im anderen Fall bezeichnen wir mit S' den Schnittpunkt von h mit AA'. Es sei S der Punkt auf AA', so dass

A, A', S, S' harmonisch liegen (siehe unten). Dann ist p die Parallelprojektion mit dem Zentrum S.

Definition 50 *Zwei Dreiecke ABC und $A'B'D'$ heißen ähnlich, wenn ihre Winkel gleich sind, d.h.*

$$\angle ABC = \angle A'B'C', \quad \angle BCA = \angle B'C'A', \quad \angle CAB = \angle C'A'B'.$$

Satz 51 *Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'D'$ ähnlich sind, so sind ihre Seitenverhältnisse gleich:*

$$\begin{aligned} |AB|/|AC| &= |A'B'|/|A'C'| \\ |BC|/|BA| &= |B'C'|/|B'A'| \\ |CB|/|CA| &= |C'B'|/|C'A'|. \end{aligned} \tag{21}$$

Sind umgekehrt die Seitenverhältnisse gleich so sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis: (Figur 30): Wir nehmen zunächst an, dass die Dreiecke ähnlich sind. Wir tragen auf der Gerade $A'B'$ von A' aus eine Strecke $A'B''$ ab, und zwar so, dass $|A'B''| = |AB|$ und so dass B' und B'' auf der gleichen Seite des Punktes A' liegen. Wir zeichen durch B'' eine Parallele zu der Geraden $B'C'$. Diese Parallele möge die Gerade $A'C'$ in dem Punkt C'' treffen. Da Winkel an geschnittenen Parallelen gleich sind, sieht man sofort, dass die Dreiecke $A'B''C''$ und $A'B'C'$ ähnlich sind. Damit haben die Dreiecke ABC und $A'B''C''$ gleiche Winkel und es gilt $|A'B''| = |AB|$. Diese Dreiecke sind daher kongruent. Wir finden:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B''|}{|A'C''|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|}$$

Die letzte Gleichung folgt nach dem 1.Strahlensatz (Satz 42). Damit ist die erste Gleichung von (21) bewiesen. Die übrigen Gleichungen folgen auf die gleichen Weise.

Beweis der Umkehrung: Man zeichnet ein Dreieck $A''B''C''$, das zu $A'B'C'$ ähnlich ist und so dass $AB = A''B''$. Dann haben die Dreiecke $A''B''C''$ und $A'B'C'$ nach dem bewiesenen Teil des Satzes die gleichen Seitenverhältnisse. Damit haben auch die Dreiecke $A''B''C''$ und ABC die gleichen Seitenverhältnisse. Da diese Dreiecke zudem eine Seite gemeinsam haben, müssen alle Seiten gleich sein. Also sind die Dreiecke $A''B''C''$ und ABC kongruent. Sie stimmen also auch in ihren Winkeln über ein. Da die Winkel von $A''B''C''$ und $A'B'C'$ nach Konstruktion übereinstimmen, folgt, dass auch die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die gleichen Winkel haben. *Q.E.D.*

5.2 Anwendung der Strahlensätze

Satz 52 *(Menelaus) Es sei ABC ein Dreieck. Es sei $E \in BC$, $F \in AC$ und $G \in AB$. Keiner der Punkte E, F, G möge ein Eckpunkt des Dreiecks sein.*

Die drei Punkte liegen genau dann auf einer Geraden, wenn:

$$\frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GB}} \cdot \frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}} \cdot \frac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{FA}} = 1 \tag{22}$$

Beweis (Figur 31): Angenommen die Punkte E, F, G liegen auf einer Geraden g. Man zeichnet zu AB die Parallele durch C. Sie schneide g im Punkt D. Dann findet man nach dem zweiten Strahlensatz die Gleichungen:

$$\frac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{FA}} = \frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{GA}}, \qquad \frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}} = \frac{\overrightarrow{GB}}{\overrightarrow{DC}}$$

Wenn man diese Gleichungen multipliziert erhält man:

$$\frac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{FA}} \cdot \frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}} = \frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{GA}} \cdot \frac{\overrightarrow{GB}}{\overrightarrow{DC}} = \frac{\overrightarrow{GB}}{\overrightarrow{GA}}$$

Daraus sieht man eine Behauptung des Satzes von Menelaus. Die Umkehrung erhält man, indem man den Schnittpunkt E' der Geraden FG mit der Gerade CB betrachtet. Dann folgt nach dem Bewiesenen, dass

$$\frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}} = \frac{\overrightarrow{E'B}}{\overrightarrow{E'A}}$$

Daraus sieht man, dass $E = E'$. Also liegen die Punkte G, E, F auf einer Geraden. *Q.E.D.*

Den Quotienten auf der linken Seite von (22) nennt man den Ceva-Menalaus Quotienten.

Satz 53 *(Ceva) Es sei ABC ein Dreieck. Es sei $E \in BC$, $F \in AC$ und $G \in AB$. Keiner der Punkte E, F, G möge ein Eckpunkt des Dreiecks sein. Die drei Geraden AE, BF, CG schneiden sich genau dann in einem Punkt oder sind parallel, wenn*

$$\frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GB}} \cdot \frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}} \cdot \frac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{FA}} = -1 \tag{23}$$

Beweis (Figur 32): Zunächst nehmen wir an, dass die drei Geraden in einem Punkt S schneiden. Wenn wir Menelaus auf das Dreieck ABE anwenden, so erhalten wir:

$$\frac{\overrightarrow{SE}}{\overrightarrow{SA}} \cdot \frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GB}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CE}} = 1$$

Wenn wir Menelaus auf das Dreieck AEC anwenden, so erhalten wir:

$$\frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{SE}} \cdot \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{FA}} = 1$$

Wenn man die letzten beiden Gleichungen miteinander multipliziert und beachtet, dass $\overrightarrow{CB}/\overrightarrow{BC} = -1$ so erhält man:

$$\frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{CE}} \cdot \frac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{FA}} = -1$$

Q.E.D.

Als Anwendung zeigt man, dass sich die Seitenhalbierenden (bzw. die Höhen) eines Dreiecks in einem Punkt scheiden.

Satz 54 *Es sei ABC ein Dreieck. Es sei w die Winkelhalbierende im Punkt A und $F \in BC$ ihr Schnittpunkt mit der Seite BC. Dann gilt:*

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|FB|}{|FC|}$$

Beweis (Figur 33): Man findet einen Punkt A' auf der Winkelhalbierenden AF, so dass $|A'B| = |AB|$. Da das Dreieck ABA' dann gleichschenklig ist, gilt $\angle FA'B = \angle BAF$. Daraus sieht man, dass die Dreiecke $A'FB$ und AFC aehnlich sind. Damit sind die Seitenverhältnisse gleich:

$$\frac{|AC|}{|FC|} = \frac{|A'B|}{|FB|} = \frac{|AB|}{|FB|}$$

Q.E.D.

Man kann diesen Satz auch beweisen, indem man den Sinussatz auf das Dreieck ABF und ACF anwendet und beachtet, dass $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$.

Wie kann man zeigen, dass sich die Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden?

Definition 55 *Es seien $ABCD$ vier verschiedene Punkte auf einer Geraden. Man sagt, dass die Punkte harmonisch liegen, wenn*

$$\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|DA|}{|DB|}$$

Natürlich kommt es dabei auf die Reihenfolge der Punkte an. In Vektorform lautet die Definition:

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} \tag{24}$$

Satz 56 *In einem vollständigen Vierseit seien A, B zwei Eckpunkte, die nicht beide auf einer Seite liegen. Die Diagonale AB möge von den anderen beiden Diagonalen in den Punkten C, D geschnitten werden. (Figur 33)*

Dann liegen die Punkte A, B, C, D harmonisch.

Beweis: Wenn man Ceva auf das Dreieck ABG anwendet, so ergibt sich:

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \cdot \frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EG}} \cdot \frac{\overrightarrow{FG}}{\overrightarrow{FA}} = -1$$

Wenn man Menelaus auf das Dreieck ABG anwendet, so ergibt sich:

$$\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} \cdot \frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EG}} \cdot \frac{\overrightarrow{FG}}{\overrightarrow{FA}} = 1$$

Aus den letzten beiden Gleichungen findet man unmittelbar (24) Q.E.D.

Satz 57 *(Lemma des Apollonius, Figur 35)*

Es sei ASB ein Dreieck. Es sei $C \in \overline{AB}$ der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch S mit der Seite AB. Man errichtet in S die Senkrechte zu SC. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden AB sei D. Dann liegen die Punkte $ABCD$ harmonisch.

Beweis: Man zieht eine Parallele h zu SD durch den Punkt B. Der Schnittpunkt von h mit AS sei F. Dann ist BF senkrecht zu SC, da SD senkrecht zu SC war. Man findet $|FS| = |BS|$, denn dies sind die Hypothenusen zweier kongruenter rechwinkliger Dreiecke.

Aus dem Strahlensatz angewendet auf die Parallelen FB und SD ergibt sich:

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AS|}{|FS|} = \frac{|AS|}{|BS|}$$

Andererseits findet man nach dem Satz 54 über die Winkelhalbierende:

$$\frac{|AS|}{|BS|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Zusammen mit der letzten Gleichnung ergibt sich, dass die Punkte A, B, C, D harmonisch liegen:

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Q.E.D.

Definition 58 *Es seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte, die auf einer Geraden liegen. Dann definiert man ihr Doppelverhältnis $[A, B, C, D]$:*

$$[A, B, C, D] = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DC}}$$

Das Doppelverhältnis ist eine reelle Zahl. Es ist das Verhältnis von zwei Teilverhältnissen. Die Zahlen 0 und 1 können nicht Doppelverhältnisse von vier Punkten sein. Es ist wichtig zu bemerken, dass das Doppelverhältnis von der Reihenfolge der Punkte A, B, C, D abhängt.

Die Punkte A, B, C, D liegen genau dann harmonisch, wenn

$$[A, B, C, D] = -1.$$

Satz 59 *Es sei S ein Punkt in der Ebene. Es seien g und g' zwei Geraden die nicht durch S gehen. Es seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte auf g. Die Geraden SA, SB, SC, SD mögen die Gerade g' jeweils in genau einem Punkt schneiden und zwar in den Punkten A', B', C', D'.*

Dann gilt:

$$[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$$

Beweis: Man kann g' durch die Parallele zu g' durch A ersetzen, denn die Teilverhältnisse ändern sich bei dieser Parallelverschiebung nicht. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $A = A'$.

Man wendet Menelaus zweimal auf das Dreieck ABB' an.

Für die Gerade SC ergibt sich:

$$\frac{\overrightarrow{SB'}}{\overrightarrow{SB}} \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CA}} \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B'}} = 1$$

Für die Gerade SD ergibt sich

$$\frac{\overrightarrow{SB'}}{\overrightarrow{SB}} \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DA}} \frac{\overrightarrow{D'A}}{\overrightarrow{D'B'}} = 1$$

Daraus finden wir die Gleichung:

$$\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CA}} \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B'}} = \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DA}} \frac{\overrightarrow{D'A}}{\overrightarrow{D'B'}}$$

Q.E.D.

Man kann aufgrund des Satzes das Doppelverhältnis $[h_1, h_2, h_3, h_4]$ von vier verschiedenen Geraden h_1, h_2, h_3, h_4 definieren, die durch einen Punkt S gehen: Wenn g eine beliebige Gerade ist, so dass $A_i = g \cap h_i$, für $i = 1, 2, 3, 4$ vier verschiedene Punkte auf g sind, so gilt:

$$[h_1, h_2, h_3, h_4] = [A_1, A_2, A_3, A_4]$$

Der Sinus des Winkel zwischen zwei Geraden ist wohldefiniert, da $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$. Ein zweiter Beweis des obigen Satzes beruht darauf, dass das Doppelverhältnis $[h_1, h_2, h_3, h_4]$ nur von den Sinus der Winkel zwischen den Geraden h_1, h_2, h_3, h_4 abhängt. Aus dem Satz von Peripheriewinkel erhält man daher:

Satz 60 *Es seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte auf einem Kreis K. Es seien M und N zwei weitere Punkte auf dem Kreis. Dann gilt für die Doppelverhältnisse von Geraden:*

$$[MA, MB, MC, MD] = [NA, NB, NC, ND]$$

Die letzte Größe nennt man auch das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Punkten A, B, C, D auf dem Kreis K, und bezeichnet es mit

$$[A, B, C, D]_K.$$

Satz 61 *(von Pascal) Auf einem Kreis seien 6 Punkte gegeben:*

$$A, B, C, A', B', C'.$$

Dann liegen die Schnittpunkte $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$, und $BC' \cap B'C$ auf einer Geraden.

Beweis: (siehe Figur Pascal) Man betrachtet die 4 Punkte A, B, C, B' auf dem Kreis K. Ihnen ist ein Doppelverhältnis zugeordnet. Wir projezieren die 4 Punkte von A' auf die Gerade AB' und erhalten die Punkte T, W, V, U. Dann sind die Doppelverhältnisse gleich:

$$[A, B, C, B']_K = [T, W, V, U].$$

Dann projezieren wir die 4 Punkte von C' auf die Gerade $B'C$ und finden

$$[A, B, C, B']_K = [T', W', V', U']$$

Es sei $S = AC' \cap A'C$. Es sei $\pi : AB' \to B'C$ die Projektion mit dem Zentrum S. Dann gilt

$$\pi(U) = U', \pi(T) = T', \pi(V) = V'.$$

Wegen der Gleichung

$$[T, W, V, U] = [T', W', V', U']$$

folgt dann auch $\pi(W) = W'$. Da π die Zentralrojektion von S ist, liegen W, S, W' auf einer Geraden. *Q.E.D.*

Als Anwendung des Satzes von Pascal finden wir eine Gerade, die von Steiner und Simpson entdeckt wurde.

Satz 62 *Es sei ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b, c. Es sei P ein Punkt auf dem Umkreis von ABC. Es sei P_a die Spieglung von P an der Seite a, es sei P_b die Spieglung von P an der Seite b und es sei P_c die Spieglung von P an der Seite c.*

Dann liegen die Punkte P_a, P_b und P_c auf einer Geraden.

Beweis: Es sei A' der Schnittpunkt der Höhe h_a mit dem Umkreis und es sei B' der Schnittpunkt der Höhe h_b mit dem Umkreis.

Wir wenden den Satz von Pascal auf die folgenden Punkte des Kreises an B', C, A' und A, P, B. Wir erhalten, dass die folgenden Punkte auf einer Geraden p liegen

$$H = B'B \cap A'A, \quad U = B'P \cap CA, \quad V = A'P \cap BC.$$

Der Punkt H ist der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC.

Wir spiegeln jetzt die Gerade UB' an der Seite b. Der Punkt B' wird in den Punkt H gespiegelt und der Punkt U bleibt fest. Also wird die Gerade UB' in die Gerade p gespiegelt. Da $P \in UB'$ liegt der gespiegelte Punkt P_b auf der Geraden p.

Aus Symmetriegründen liegen dann auch die Punkte P_a und P_b auf der Geraden p. *Q.E.D.*

Korollar 63 *Es sei ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b, c. Wir bezeichnen die Höhen mit h_a, h_b und h_c. Die Schnittpunkte der Höhen h_a, h_b und h_c mit dem Umkreis seien A', B', C'.*

Es sei P ein Punkt des Umkreises. Es sei $L = PA' \cap a$, $M = PB' \cap b$ und $N = PC' \cap c$. Dann liegen die Punkte L, M, N auf einer Geraden.

6 Der Kreis

Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Eine Isometrie f ist genau dann eine Symmetrie des Kreises, wenn M ein Fixpunkt von f ist.

Die Symmetrien des Kreises sind also die Drehungen um M und die Spieglungen an Geraden durch M.

Es seien A und B zwei Punkte auf dem Kreis. Es ist anschaulich hilfreich, wenn man sich den (kleineren) Bogen $\overset{\frown}{AB}$ als Winkel vorstellt. Deshalb definieren wir

$$\overset{\frown}{AB} = \angle AMB$$

Die Strecke $\overline{AB}$ nennt man eine Sehne. Zwei Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ sind genau dann gleich lang, wenn die entsprechenden Bögen gleich groß sind:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$$

Das folgt aus den Kongruenzsätzen.

Die Mittelsenkrechte zu einer Sehne $\overline{AB}$ des Kreises verläuft durch den Mittelpunkt M, da die Punkte A und B von M den gleichen Abstand haben.

Satz 64 *Es seien A und B zwei Punkte des Kreises $\mathcal{K}$. Dann gibt es genau eine Drehsymmetrie σ mit $\sigma(A) = B$.*

Es seien A, B und $A'B'$ zwei Punktepaare, so dass

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \tag{25}$$

Dann gibt es genau eine Symmetrie σ des Kreises mit $\sigma(A) = A'$ und $\sigma(B) = B'$.

Beweis: Die erste Aussage ist klar. Die zweite folgt aus dem Kongruenzsatz (SWS) für die Dreiecke AMB und $A'MB'$. *Q.E.D.*

Satz 65 *Es seien $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ zwei parallele Sehnen des Kreises. Dann hat man gleiche Bögen:*

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \tag{26}$$

Umgekehrt seien zwei Sehnen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ gegeben, derart, dass (26) gilt. Dann gilt

$$AA' \parallel BB' \quad \textit{oder} \quad AB' \parallel A'B. \tag{27}$$

Beweis: Zur ersten Behauptung: Die Mittelsenkrechten der beiden Sehnen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ fallen zusammen. Es sei σ die Spieglung an dieser Mittelsenkrechten. Dann gilt:

$$\angle AMB = \angle\sigma(A)\sigma(M)\sigma(B) = \angle A'MB'.$$

Umgekehrt sei (26) erfüllt. Dann findet man eine Symmetrie σ des Kreises mit $\sigma(A) = A'$ und $\sigma(B) = B'$. Wenn σ eine Spieglung ist, so gilt $AA' \parallel BB'$.

Sonst betrachte man die Spieglung τ um die Mittelsenkrechte von $\overline{A'B'}$. Dann ist $\rho = \tau \circ \sigma$ eine Spieglung mit $\rho(A) = B'$ und $\rho(B) = A'$. In diesem Fall gilt $AB' \parallel A'B$. Natürlich gibt es Fälle, wo in (27) beide Relationen gelten. *Q.E.D.*

Korollar 66 *Wenn in einem Kreisviereck $AA'B'B$ die Bögen (26) gleich sind, so sind die gegenüberliegenden Seiten AA' und BB' parallel.*

Beweis: Da sich die Diagonalen AB' und $A'B$ des Vierecks schneiden, muss in (27) der erste Fall vorliegen. *Q.E.D.*

Wir können den Satz des Thales wie folgt reformulieren:

Satz 67 *Es seien ABC drei verschiedene Punkte auf einem Kreis. Die Strecke $\overline{AB}$ ist genau dann ein Durchmesser, wenn*

$$\angle ACB = 90^o.$$

Der Haupsatz über den Kreis ist der Satz vom *Sehnentangentenwinkel*:

Satz 68 *Es sei $\overline{AB}$ eine Sehne in einem Kreis. Es sei $X \neq B$ ein Punkt auf der Tangente im Punkt B. Es sei C ein Punkt auf dem Kreis, der verschieden von A und B ist, und so dass X und C auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen. Dann gilt*

$$\sphericalangle XBA = \sphericalangle BCA.$$

Korollar 69 *Es seien C und C' zwei Punkte des Kreises, die auf verschiedenen Seiten der Sehne $\overline{AB}$ liegen. Dann gilt*

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle BC'A = 180°.$$

Daraus folgt der *Satz vom Peripheriewinkel* und der *Satz von Zentriwinkel*. Ein Spezialfall ist der *Satz des Thales*.

Satz 70 *(Peripheriewinkel):*
Es sei $\overline{AB}$ eine Sehne im Kreis. Wir wählen einen der Bögen $\mathcal{B}$, der von A nach B verlaüft (nicht notwendig den kleineren). Dann gilt für zwei Punkte $P, Q \in \mathcal{B}$, die von A und B verschieden sind, dass

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle AQP.$$

Es sei R ein weiterer Punkt auf der gleichen Seite der Sehne AB wie der Bogen $\mathcal{B}$. Es sei

$$\angle APB = \angle ARB.$$

Dann liegt R auf dem Bogen $\mathcal{B}$.

Beweis: Wir beweisen nur die letzte Aussage. Die Gerade AR oder BR trifft den Kreis in einem Punkt Q, der von A und B verschieden ist. Wir können annehmen, dass A, Q und R auf einer Geraden liegen. Dann stimmen die Dreiecke AQB und ARB in zwei Winkeln und in einer Seite überein. Nach dem Kongruenzsatz folgt, dass $|AQ| = |AR|$. Damit müssen die Punkte Q und R übereinstimmen. *Q.E.D.*

Korollar 71 *Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ zwei Sehnen des Kreises $\mathcal{K}$. Es sei P ein Punkt auf dem größeren (bzw. kleineren) Bogen über $\overline{AB}$, und es sei P' ein Punkt auf dem größeren (bzw. kleineren) Bogen über $\overline{A'B'}$.*

Dann gilt $|AB| = |A'B'|$, genau dann wenn

$$\angle APB = \angle A'P'B'.$$

Beweis: Wenn die Seiten gleich lang sind, so findet man eine Symmetrie, die eine Sehne auf die andere abbildet. Die Behauptung folgt dann aus dem Peripheriewinkelsatz.

Umgekehrt seien die Winkel gleich. Nach dem Korollar zum Peripheriewinkelsatz kann man annehmen, dass die Punkte P und P' auf den gleichen Seiten der Sehnen liegen, wie der Mittelpunkt M des Kreises. Man verbindet A mit M und erhält einen weiteren Punkt P_1 auf dem größeren Bogen über $\overline{AB}$. Dann ist AP_1B ein Dreieck mit einem rechten Winkel in B und es gilt:

$$\angle APB = \angle AP_1B.$$

Eine analoge Konstruktion führt zu einem rechtwinkligen Dreieck $A'P_1'B'$. Dann sind die Dreiecke AP_1B und $A'P_1'B'$ kongruent und damit sind die Sehnen gleich lang. *Q.E.D.*

Satz 72 *(vom Zentriwinkel) Es sei $\overline{AB}$ eine Sehne in einem Kreis $\mathcal{K}$. Es sei $C \in \mathcal{K}$ ein Punkt der auf der gleichen Seite der Geraden AB liegt wie der Mittelpunkt M von $\mathcal{K}$. Der Punkt C sei verschieden von A und B. Dann gilt:*

$$2\sphericalangle ACB = \sphericalangle AMB$$

Ein Gerade trifft einen Kreis in 0, 1, oder 2 Punkten. Wenn es genau einen Schnittpunkt gibt, heißt die Gerade Tangente und der Schnittpunkt der Berührungspunkt. Die Tangente steht senkrecht auf dem Radius in ihrem Berührungspunkt.

Der *Umkreis* eines Dreiecks: Durch drei Punkte A, B, C die nicht auf einer Geraden liegen geht ein Kreis. (Konstruktion) Das ist der Umkreis des Dreiecks ABC.

Es sei w_A die Winkelhalbierende durch den Punkt A. Dann halbiert der Schnittpunkt A' von w_A mit dem Umkreis den Bogen $\overset{\frown}{BC}$ auf dem Umkreis. Analog finden wir die Punkte B', und C'. Die Höhen von $A'B'C'$ fallen mit den Winkelhalbierenden von ABC zusammen. Wir nennen $A'B'C'$ das *Zwillingsdreieck* von ABC.

Wenn $A'B'C'$ ein Dreieck ist und A, B, C die weiteren Schnittpunkte der drei Höhen mit dem Umkreis, so ist $A'B'C'$ das Zwillingsdreieck von ABC.

Die Höhen und die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist der Mittelpunkt des *Inkreises*.

Satz 73 *(Pythagoras) Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothennse $c = |AB|$, und den Katheten $a = |BC|$ und $b = |AC|$.Dann gilt:*

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \textit{(Beweis)}$$

Es sei $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle ABC$. Dann gilt:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \cos(90 - \alpha) = \cos\beta.$$

Satz 74 *(Sinussatz) Es sei ABC ein Dreieck und d der Durchmesser seines Umkreises. Es sei $\alpha = \angle BAC$ und es sei $a = |BC|$. Dann gilt*

$$\sin\alpha = a/d$$

Aufgabe: Man finde den Umkreis des Dreiecks ABC, wenn die Seite $\overline{BC}$ und die Größe des Winkels α gegeben ist.

Korollar 75 *Es seien α, β, γ die Winkel des Dreiecks ABC. Es gilt:*

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

(Beweis)

Bemerkung: Nach der Definition von sin gilt: $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$.

Der Apolloniuskreis: Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Es sei C ein Punkt der Strecke, der von den Punkten A und B verschieden ist und der nicht der Mittelpunkt der Strecke ist.

Satz 76 *Der geometrische Ort aller Punkte S, so dass SC die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ASB$ ist, ist ein Kreis. Er heißt Apolloniuskreis des Teilungspunktes $C \in AB$.*

Beweis: Es sei D der Punkt der Geraden AB mit der Eigenschaft, dass $ABCD$ harmonisch liegen. Dann liegt nach Satz 57 jeder Punkt S des definierten geometrischen Ortes auf dem Thaleskreis über AC. *Q.E.D.*

Mit Hilfe des Apolloniuskreises kann man das so formulieren: Der Apolloniuskreis geht durch C und hat seinen Mittelpunkt auf der Geraden AB. Es sei D der zweite Schnittpunkt von AB mit dem Apolloniuskreis. Dann liegen die Punkte A, B, C, D harmonisch. Also ist der Apolloniuskreis der Thaleskreis über CD.

Man kann den Satz vom Apolloniuskreis umformulieren:

Satz 77 *Es sei $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ eine reelle Zahl. Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke.*

Der geometrische Ort aller Punkte S, so dass

$$|SA| = \lambda |SB|$$

ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden AB liegt. Es seien C, D die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden AB. Dann liegen die Punkte A, B, C, D harmonisch.

Beispiel: Man konstruiere ein Dreieck aus dem Seitenverhältnis $a : b$, der Seite c und seiner Höhe h_c auf der Seite c.

Definition 78 *Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis und P ein Punkt außerhalb von $\mathcal{K}$. Die Polare zu P ist die Gerade, die die Berührungspunkte der Tangenten von P an den Kreis verbindet.*

Lemma 79 *Die Bezeichnungen seien wie in der letzten Definition. Wir verbinden P mit dem Mittelpunkt M des Kreises. Die Gerade PM schneide den Kreis in den Punkten C und D. Es sei F der Schnittpunkt der Polare mit dem Durchmesser $\overline{CD}$. Dann liegen die Punkte P, F, C, D harmonisch.*

Beweis (siehe Figur Polare 1): Wir legen von P eine Tangente an den Kreis. Sie berührt den Kreis in einem Punkt T, der auf der Polare liegt. Mit dem Satz vom Sehnentangentenwinkel sieht man, dass die Winkel

$$\angle PTC \quad \text{und} \quad \angle CTF,$$

jeweils gleich dem Winkel $\angle TDF$ sind. Das Apolloniuslemma (Satz 57) angewendet auf das Dreieck PTF zeigt die Behauptung. *Q.E.D.*

Satz 80 *(Steiner): Es sei g eine Gerade durch P, die den Kreis $\mathcal{K}$ in zwei Punkten A und B schneidet. Es sei P' der Schnittpunkt von g mit der Polare zu P. Dann liegen die Punkte $ABPP'$ harmonisch.*

Beweis (Figur Polare 2): Wir verbinden P mit dem Mittelpunkt und erhalten wie im letzten Lemma den Durchmesser CD. Wir betrachten das vollständige Vierseit AC, AD, BC, BD. Es hat neben den Eckpunkten A, B, C, D noch die Eckpunkte S und S'. Wir betrachten die Diagonale $s = SS'$. Wir bezeichen mit F den Schnittpunkt von s mit der Diagonale CD und mit P' den Schnittpunkt von s mit der Diagonale AB. Wir werden sehen, dass dies der gleiche Punkt ist, von dem im Satz die Rede ist.

Wenn man den Satz vom vollständigen Vierseit auf die Diagonalen AB und CD anwendet, folgt dass die folgenden Punkte harmonisch liegen:

$$A, B, P, P' \quad \text{und} \quad C, D, P, F.$$

Nun zeigt das Lemma, dass die Polare zu P die Senkrechte zu CD im Punkte F ist.

Andereseits ist nach dem Satz über den Höhenschnittpunkt im Dreieck CSD die Gerade SF eine Höhe, denn sie geht durch den Schnittpunkt S' der beiden Höhen CB und DA. Damit ist SF die Polare zu P. Also liegt P' auf der Polare zu P und ist damit der Punkt von dem im Satz die Rede ist. *Q.E.D.*

References

[1] Eine Drehung, die eine Strecke auf eine Strecke gleich großer Länge abbildet.

[2] Die Zentralprojektion von einer Geraden g auf eine Gerade g' mit dem Zentrum S.

[3]

[4] Aus dem 1.Strahlensatz folgt der 2.

Grundkonstruktionen

In der Klausur können die folgenden Konstruktionen ohne Erklärung verwendet werden. Man darf sie auch mit anderen Hilfsmitteln als Zirkel und Lineal durchführen.

- Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade fällen oder in einem Punkt der Geraden die Senkrechte errichten.
- Die Mittelsenkrechte oder den Mittelpunkt einer Strecke konstruieren.
- Die Winkelhalbierende konstruieren.
- Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden die Parallele zeichnen (Parallelverschiebung).
- Zu einer Strecke den Kreis zeichnen, der diese Strecke als Durchmesser hat (Thaleskreis).
- Einen Winkel abtragen.
- Eine Strecke abtragen.

Zu erklären:
Einschränkung einer Abbildung.
bijektiv
parallel = zwei Geraden schneiden sich nicht oder fallen zusammen.